Análise Numérica

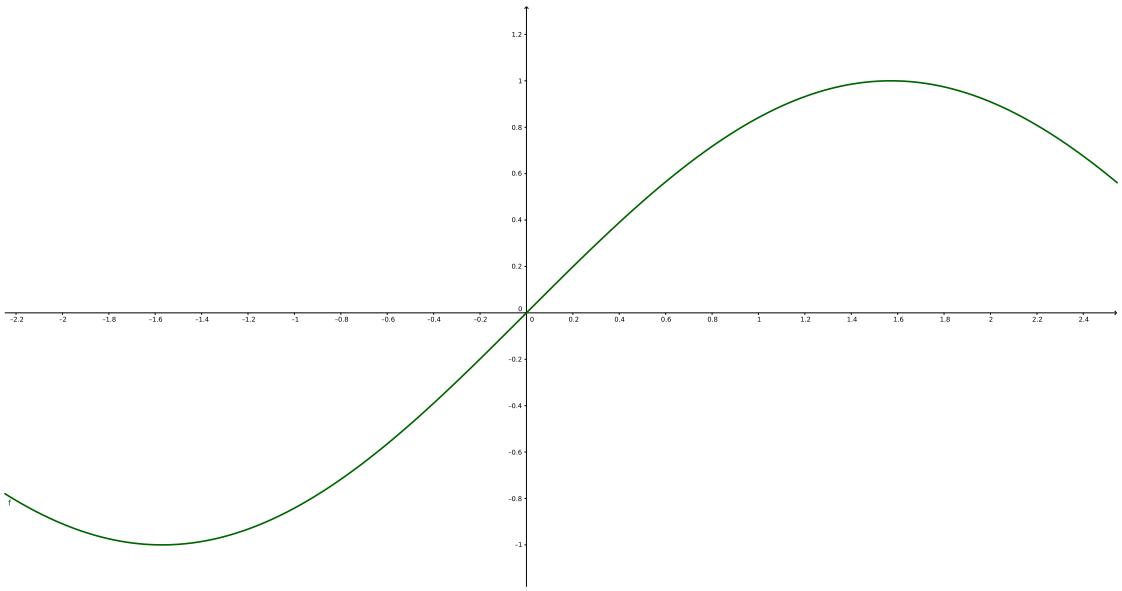
Aula 3 — Método da Newton

Prof. Adriano Barbosa

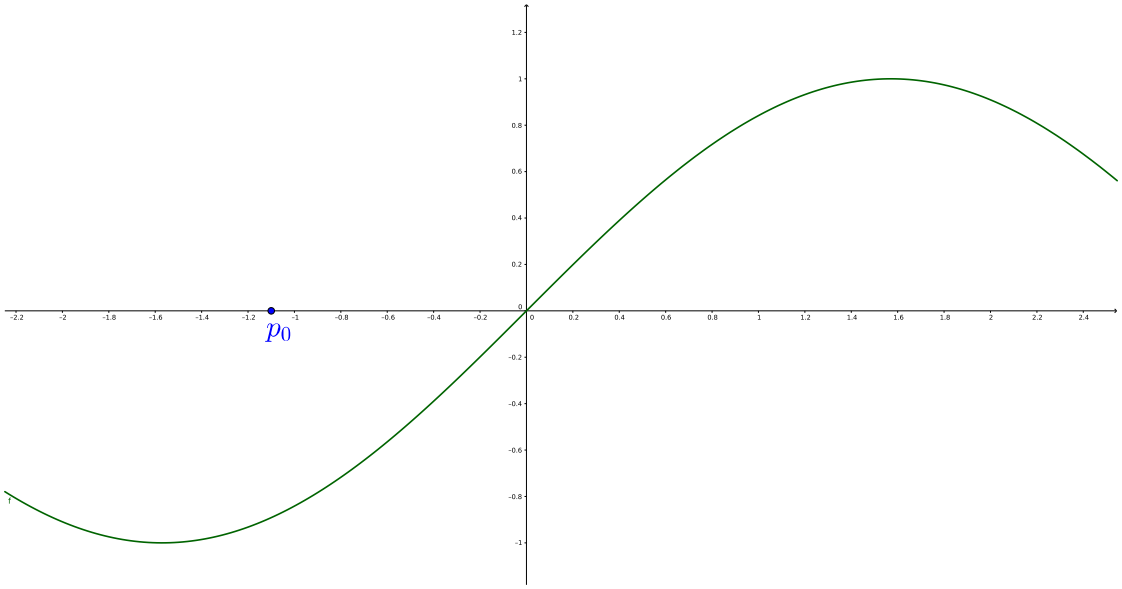
FACET — UFGD

28 de novembro de 2016

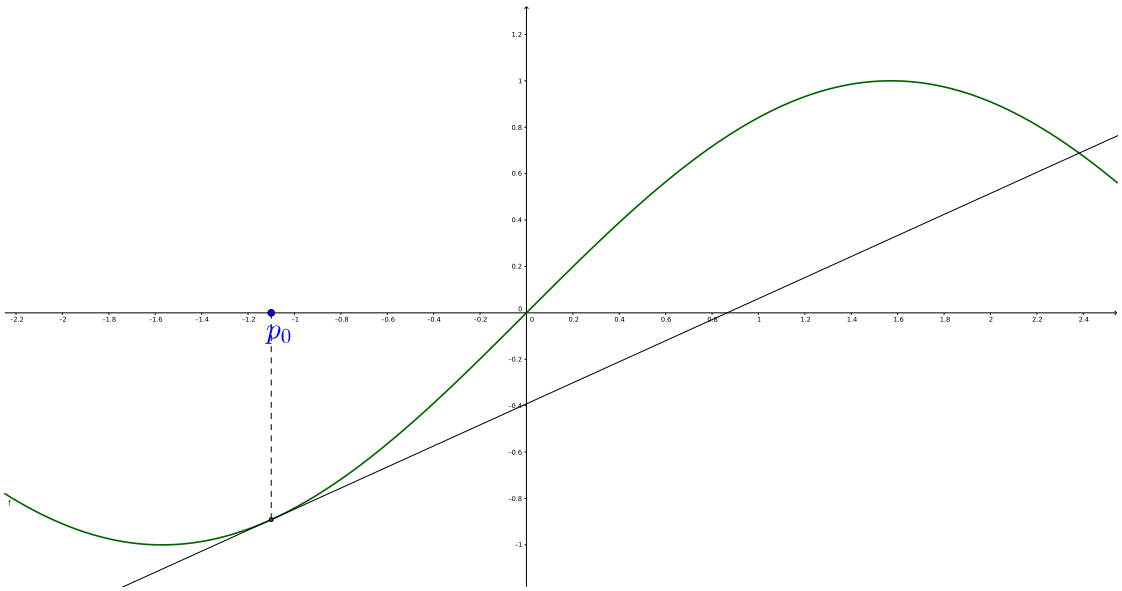
Intuição



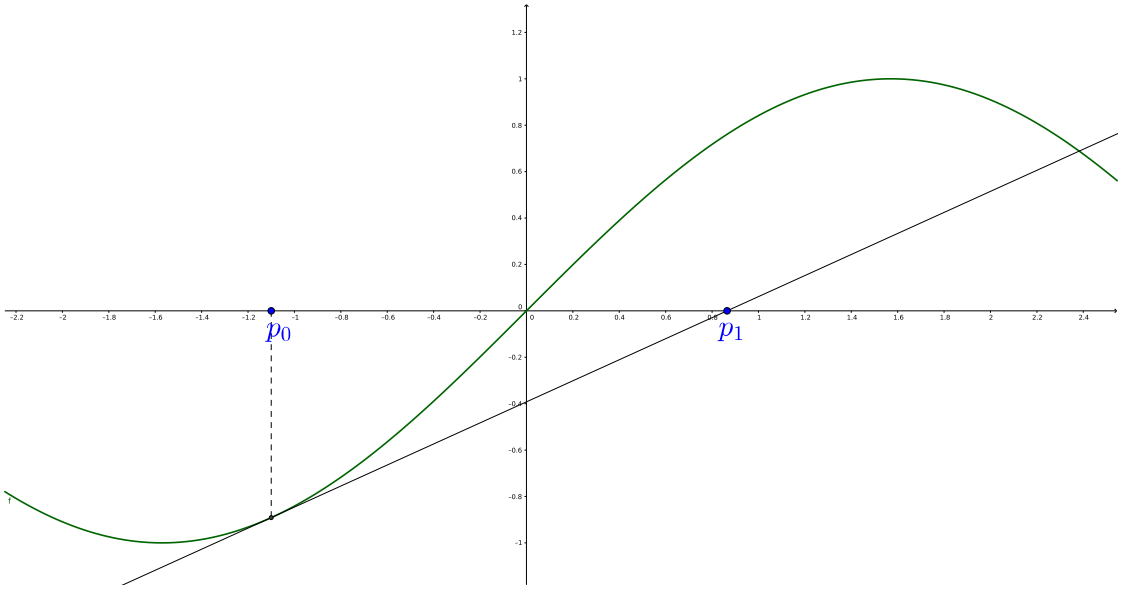
Intuição



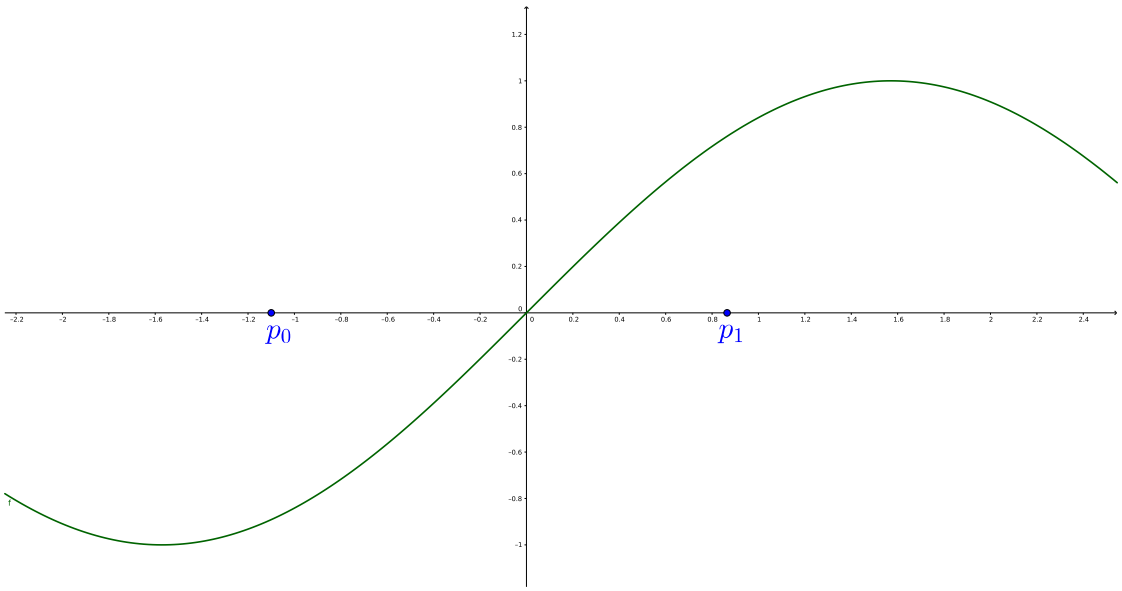
Intuição



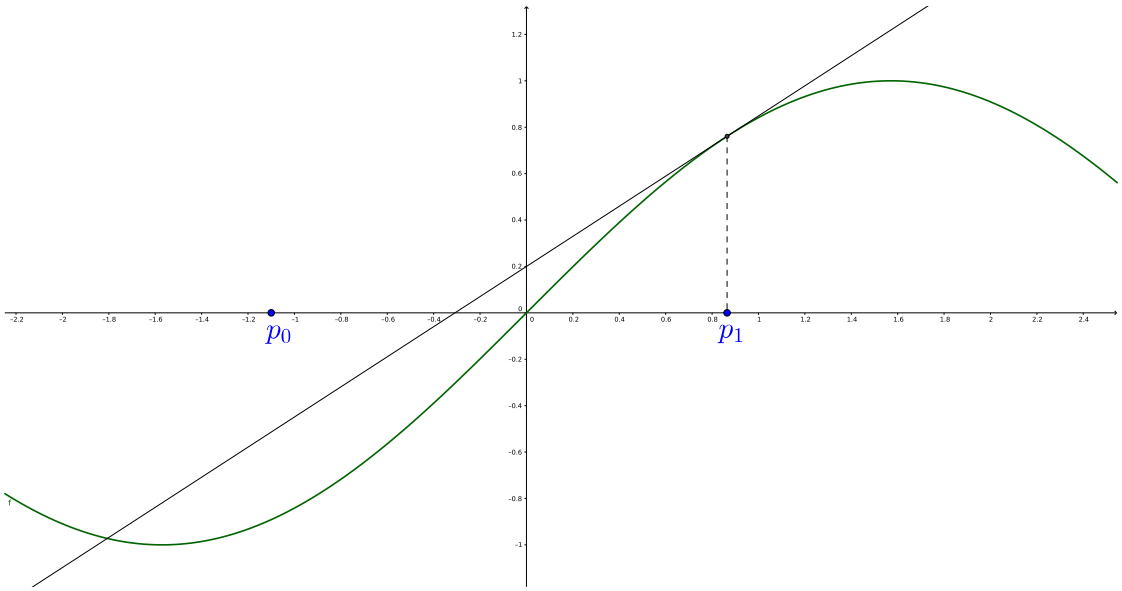
Intuição



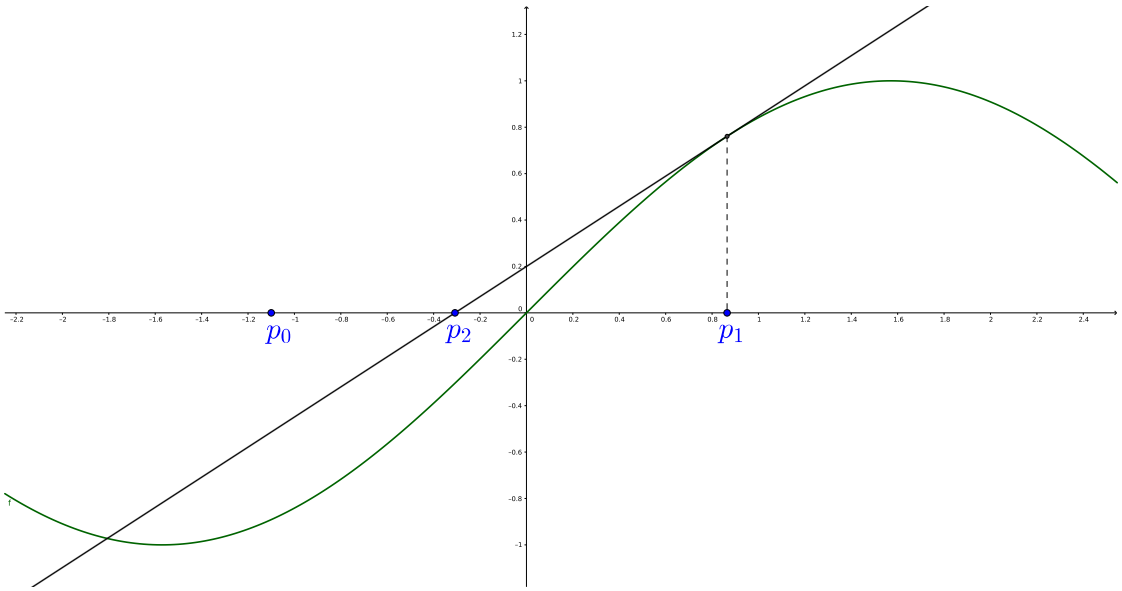
Intuição



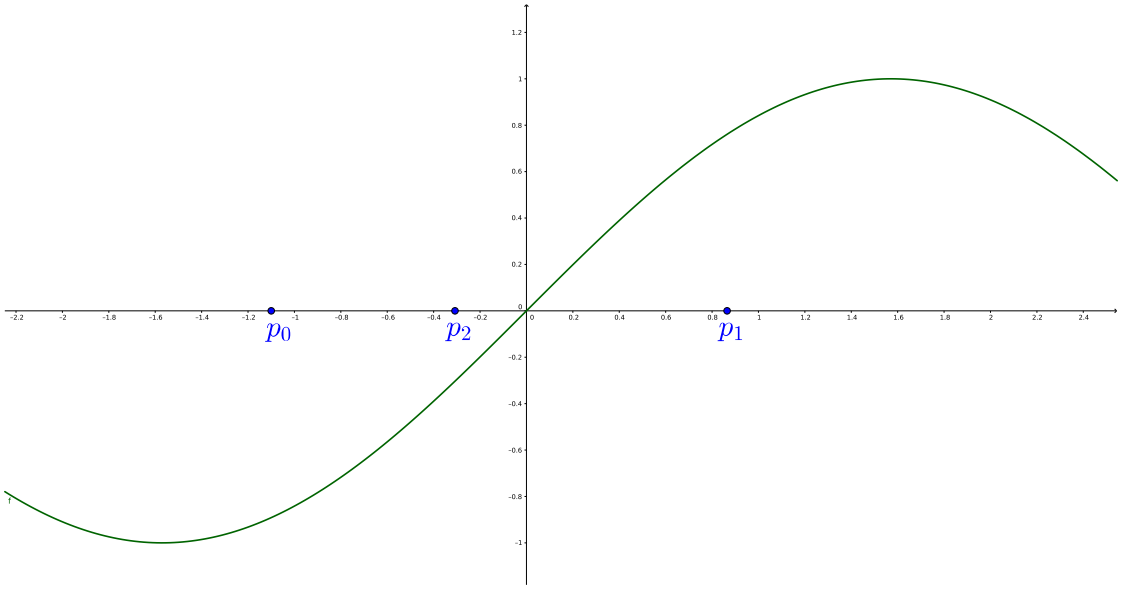
Intuição



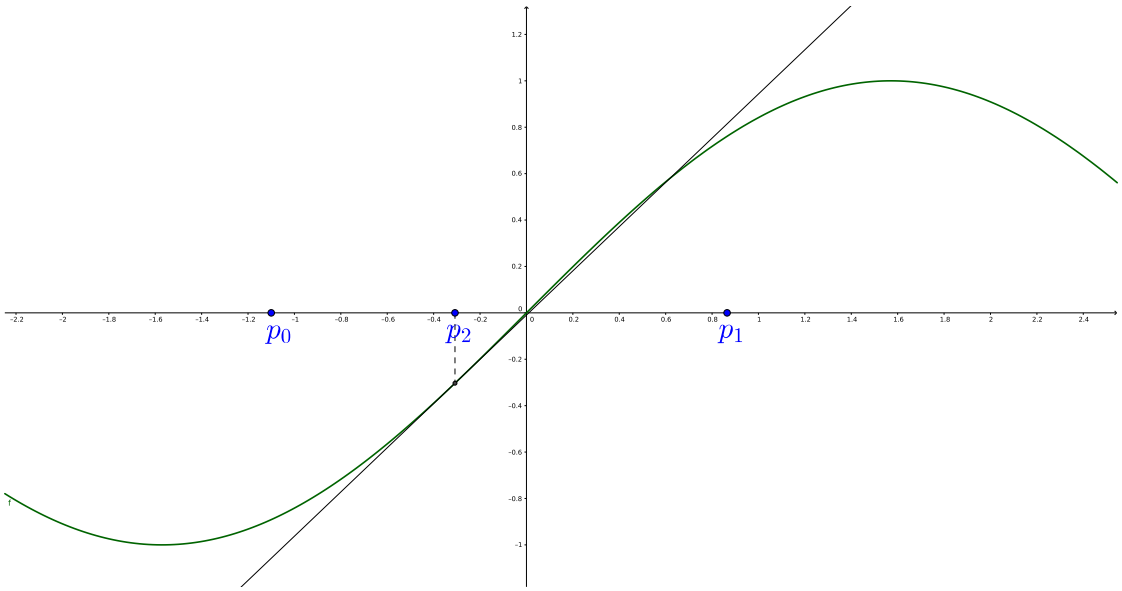
Intuição



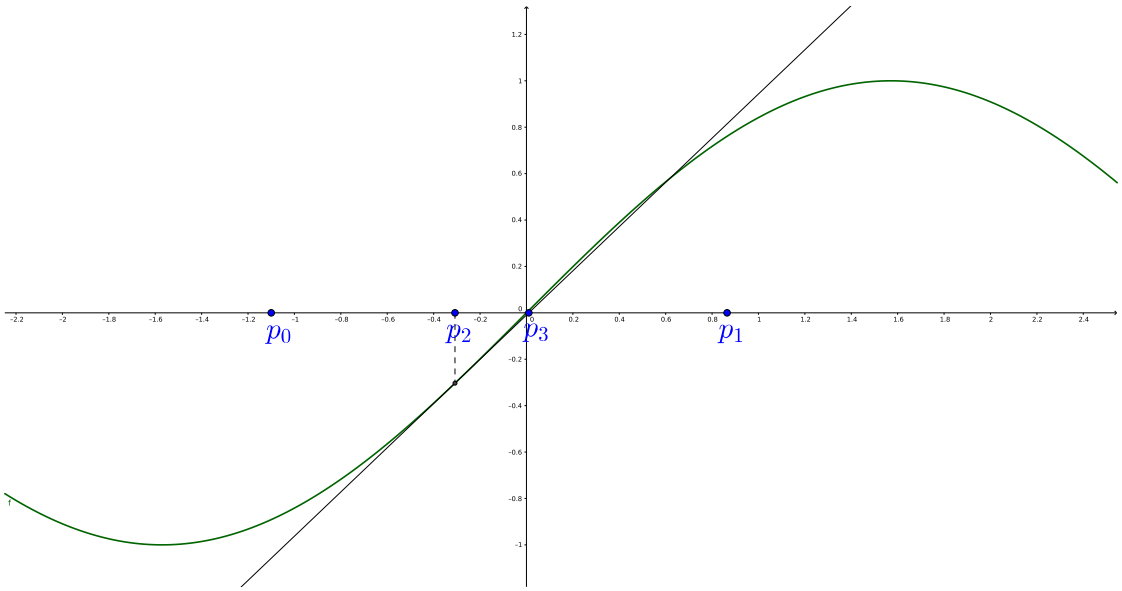
Intuição



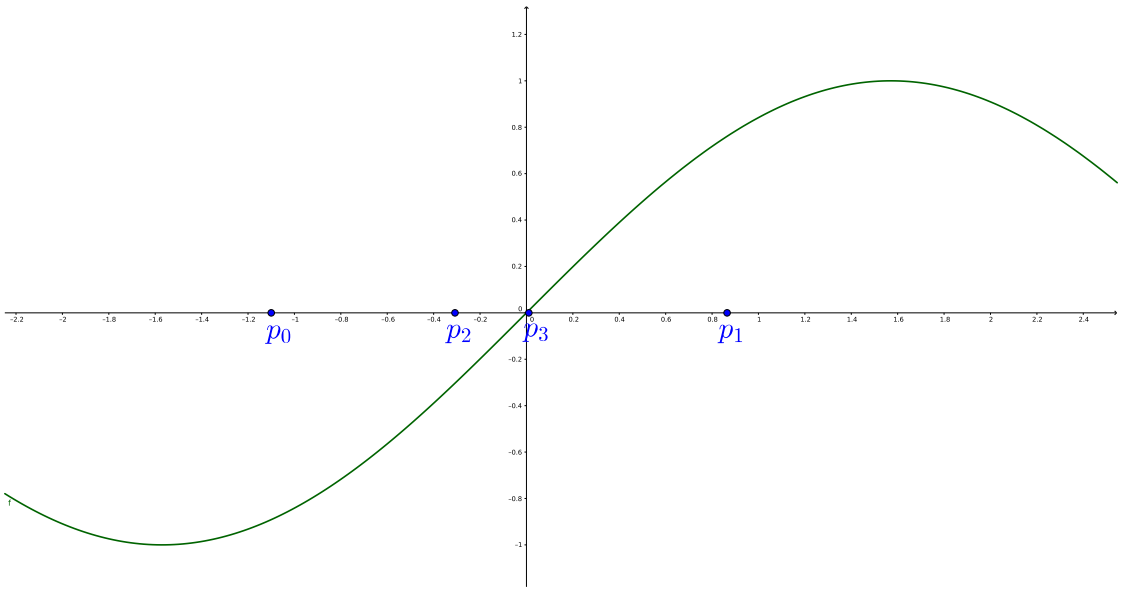
Intuição



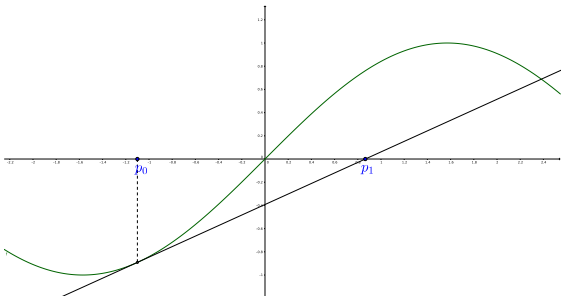
Intuição



Intuição



Método de Newton



Equação da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ponto: $(x_0, y_0) = (p_0, f(p_0))$
Inclinação: $m = f'(p_0)$
Novo ponto: $(p_1, 0)$

$$0 - f(p_0) = f'(p_0)(p_1 - p_0)$$

$$\Rightarrow p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Método de Newton

De modo geral:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

para $n \geqslant 1$ e $f'(p_{n-1}) \neq 0$

Implementação

```
% entrada
p0 = -1.1;          % aproximacao inicial
tol = 1e-5;         % tolerancia
N = 50;             % maximo de iteracoes
f = @(x) sin(x);    % funcao
df = @(x) cos(x);   % derivada de f

% inicializacao
saida = 1;

% calculando
i = 1;
while (i <= N)
    p = p0 - (f(p0) / df(p0));
    if abs(p - p0) < tol
        disp(p);
        saida = 0;
        break;
    end
    i = i + 1;
    p0 = p;
end

if (saida == 1)
    disp('Numero maximo de iteracoes alcancado.');
end
```

Critérios de parada

Outros critérios de parada podem ser aplicados:

- $|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$
- $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \;\; p_n \neq 0$
- $|f(p_n)| < \varepsilon$

Exemplo

Encontrar um zero de $f(x) = \cos x - x$.

$$f(0) = 1 \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} = p_{n-1} - \frac{\cos(p_{n-1}) - p_{n-1}}{-\sin(p_{n-1}) - 1}$$

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Convergência

Teorema:
Seja $f \in C^2[a, b]$. Se $p \in (a, b)$ com $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que o método de Newton gera uma sequência $\{p_n\}_n$ que converge para p qualquer que seja a aproximação inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Convergência

O Teorema garante que o método de Newton converge para aproximações iniciais suficientemente próximas do zero da função.

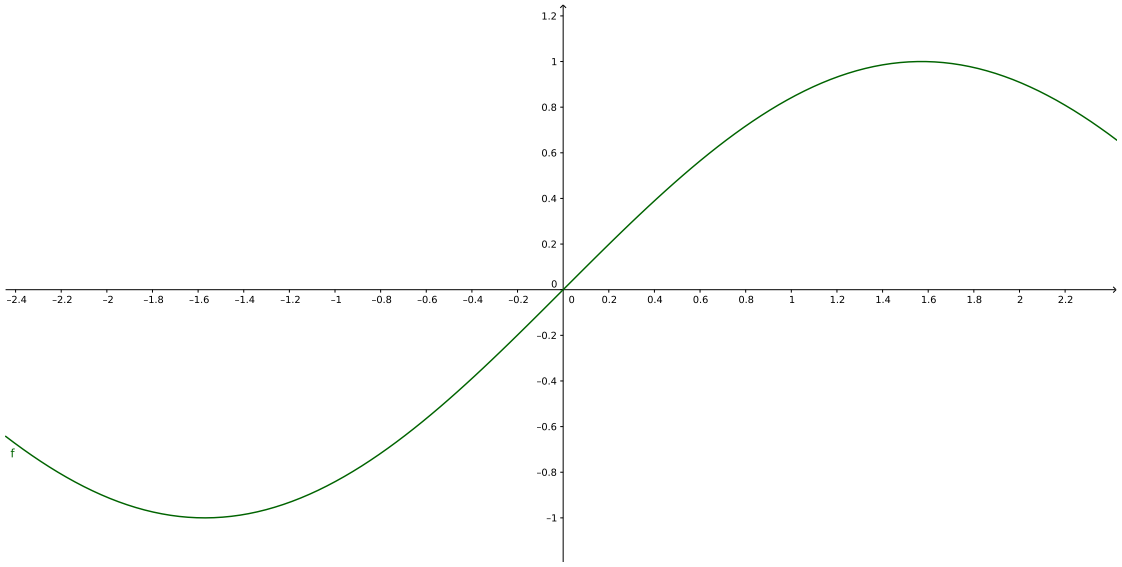
Na prática o método convergirá rapidamente ou divergirá claramente.

Extensões

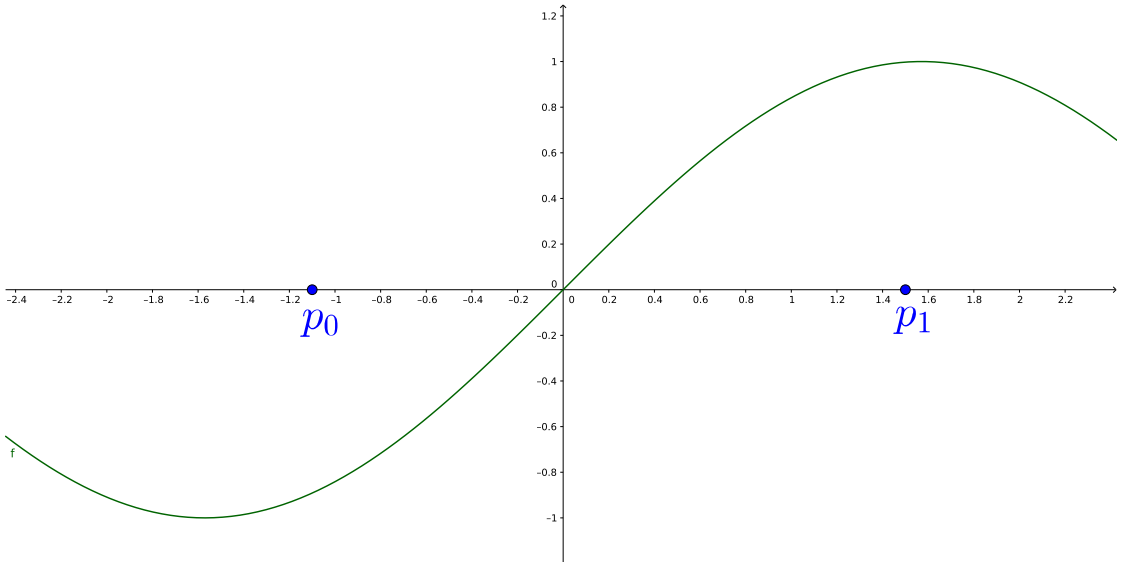
Extensões do método de Newton:

- Método da Secante
- Método da Falsa Posição

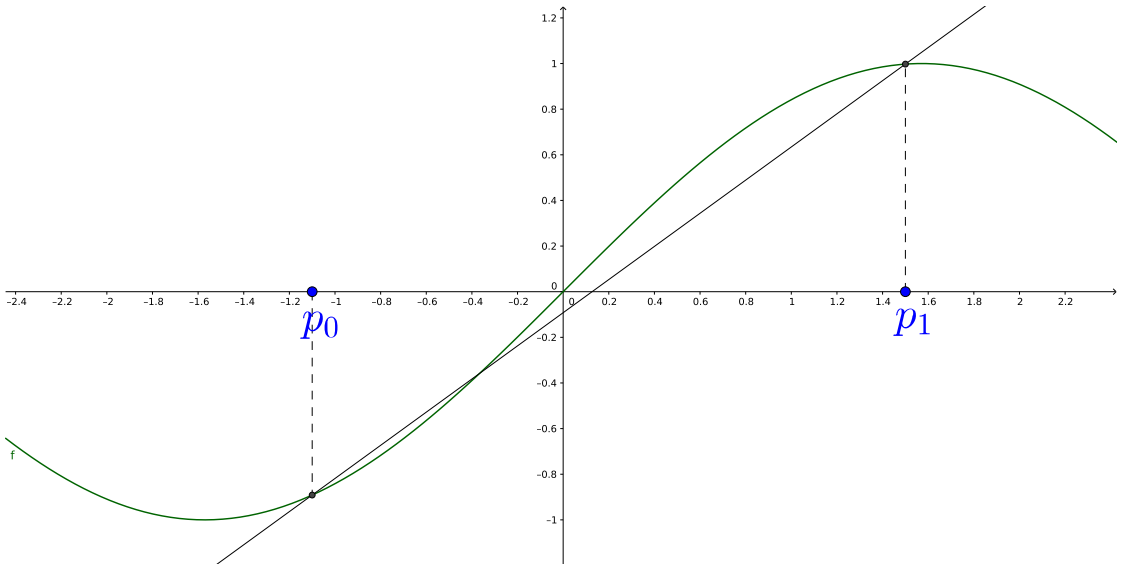
Método da Secante



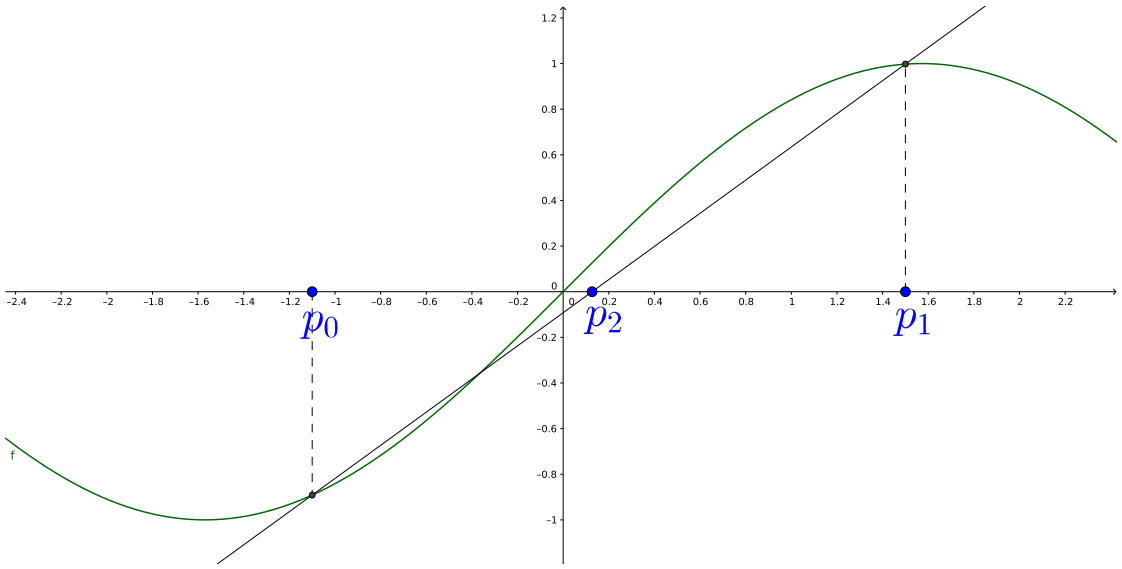
Método da Secante



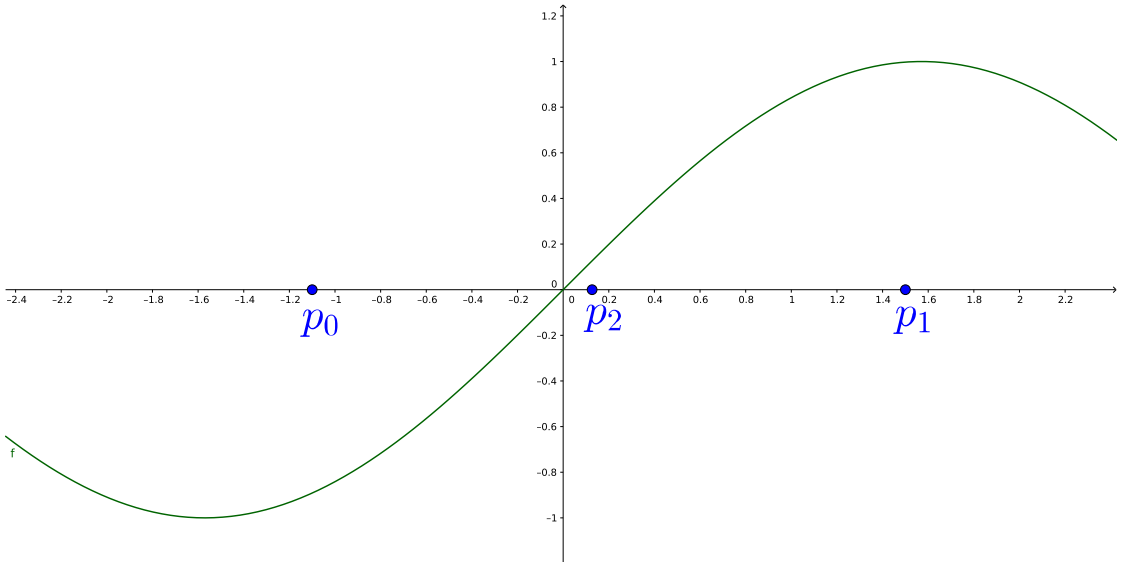
Método da Secante



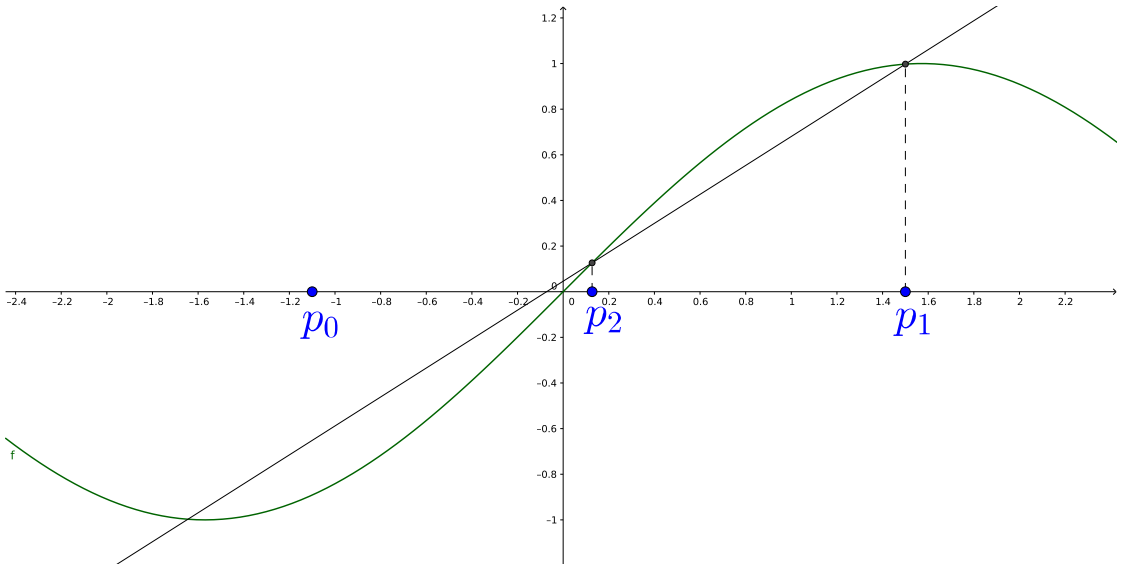
Método da Secante



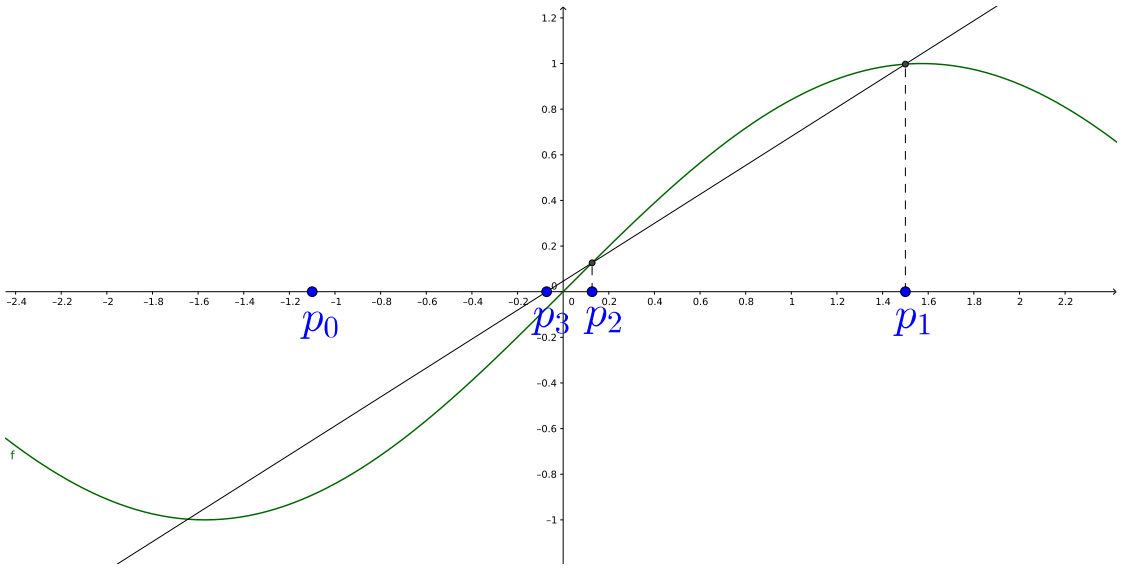
Método da Secante



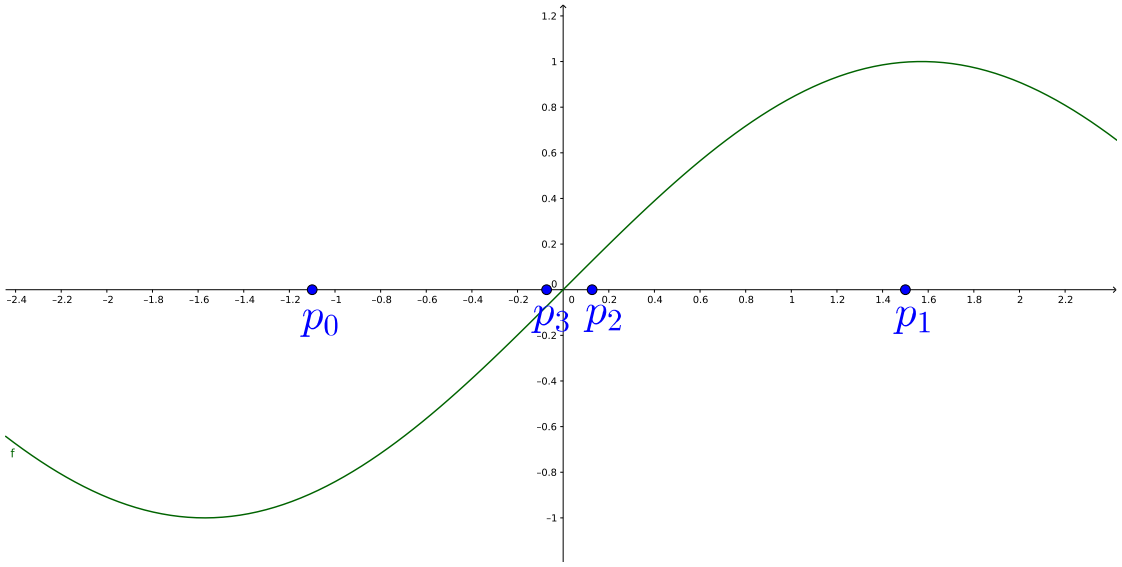
Método da Secante



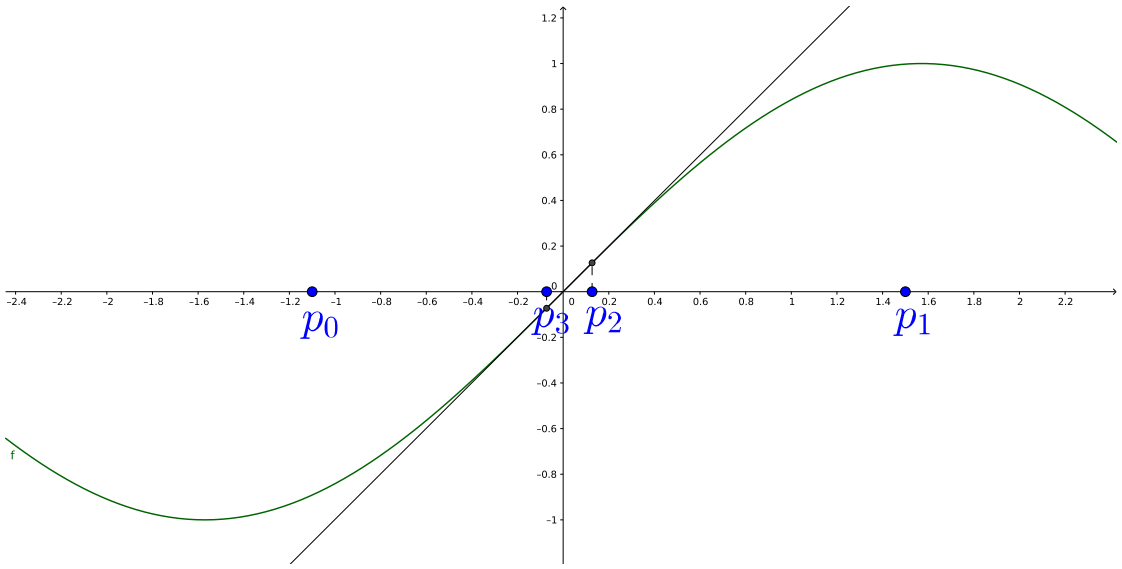
Método da Secante



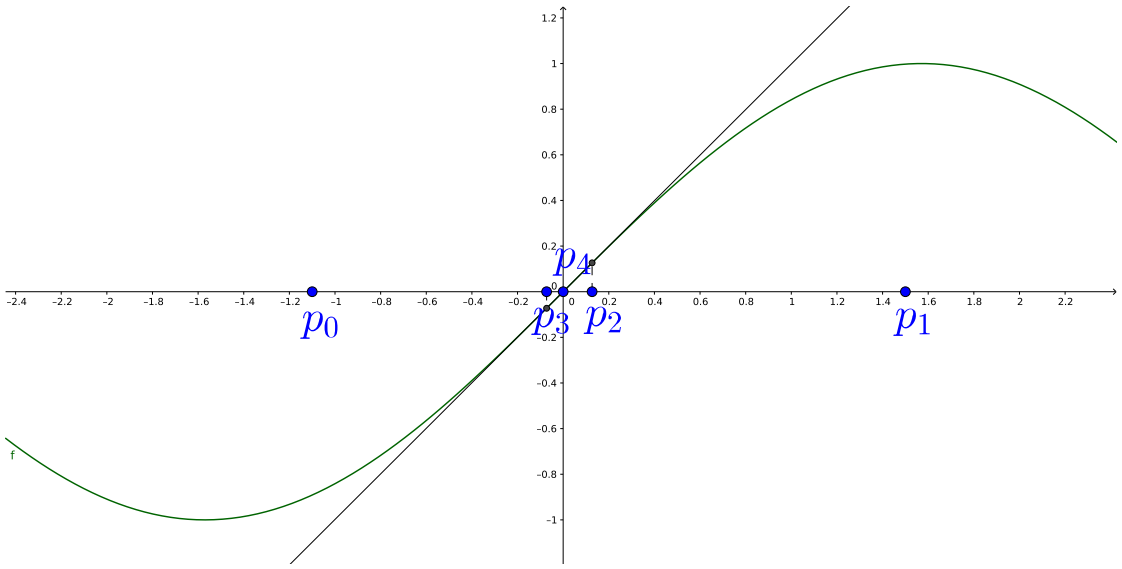
Método da Secante



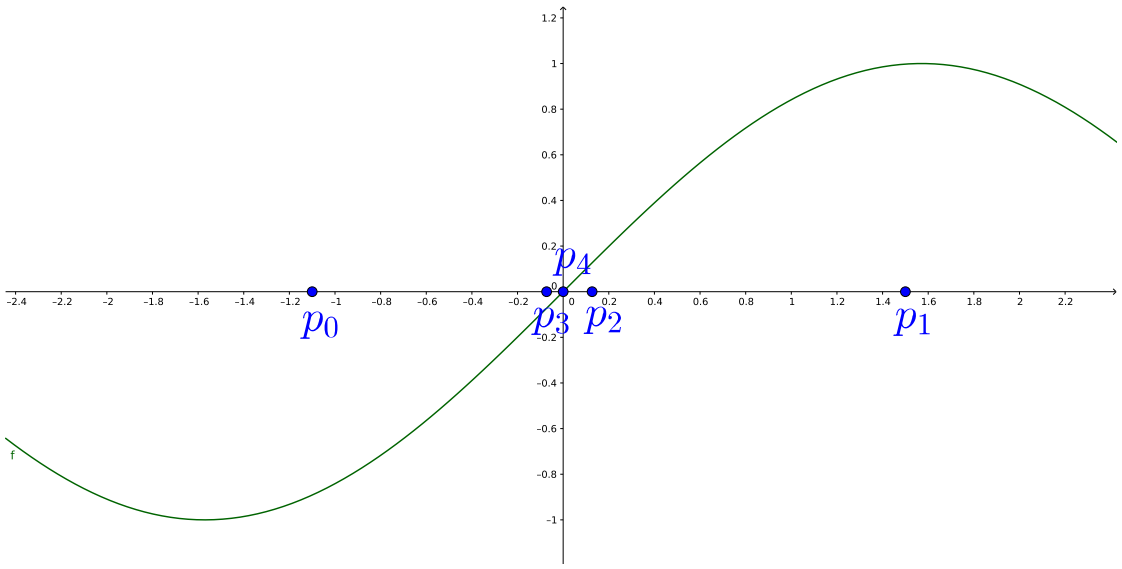
Método da Secante



Método da Secante



Método da Secante



Método da Secante

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

se p_{n-2} é próximo de p_{n-1}, então

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

logo

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \approx p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

Implementação

```
% entrada
p0 = -1.1;          % aproximacao inicial
p1 = 1.5;           % segunda aproximacao inicial
tol = 1e-5;         % tolerancia
N = 50;             % maximo de iteracoes
f = @(x) sin(x);    % funcao

% inicializacao
saida = 1;

% calculando
i = 2;
q0 = f(p0);
q1 = f(p1);
while (i <= N)
    p = p1 - ( q1 * (p1 - p0) / (q1 - q0) );
    if abs(p - p1) < tol
        disp(p);
        saida = 0;
        break;
    end
    i = i + 1;
    p0 = p1;
    q0 = q1;
    p1 = p;
    q1 = f(p);
end

if (saida == 1)
    disp('Numero maximo de iteracoes alcancado.');
end
```

Exemplo

Encontrar um zero de $f(x) = \cos x - x$.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1} - p_{n-2})(\cos(p_{n-1}) - p_{n-1})}{(\cos(p_{n-1}) - p_{n-1}) - (\cos(p_{n-2}) - p_{n-2})}$$

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

Newton × Secante

Secant	
n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

Newton	
n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Método da Falsa Posição

Similar ao método da Secante, garantindo que o zero da função está sempre entre iterações sucessivas:

- Escolha p_0 e p_1 tais que $f(p_0)f(p_1) < 0$
- Calcule p_2 como a interseção entre o segmento que liga $(p_0, f(p_0))$ e $(p_1, f(p_1))$ e o eixo x
- Se $f(p_2)f(p_1) < 0$, calcule p_3 como a interseção entre o segmento que liga $(p_1, f(p_1))$ e $(p_2, f(p_2))$ e o eixo x
- Caso contrário, calcule p_3 como a interseção entre o segmento que liga $(p_0, f(p_0))$ e $(p_2, f(p_2))$ e o eixo x
- ...

Implementação

```
% entrada
p0 = -1.1;          % aproximacao inicial
p1 = 1.5;           % segunda aproximacao inicial
tol = 1e-5;         % tolerancia
N = 50;             % maximo de iteracoes
f = @(x) sin(x);    % funcao

% inicializacao
saida = 1;

% calculando
i = 2;
q0 = f(p0);
q1 = f(p1);
while (i <= N)
    p = p1 - ( q1 * (p1 - p0) / (q1 - q0) );
    if abs(p - p1) < tol
        disp(p);
        saida = 0;
        break;
    end
    i = i + 1;
    q = f(p);
    if (q * q1 < 0)
        p0 = p1;
        q0 = q1;
    end
    p1 = p;
    q1 = q;
end

if (saida == 1)
    disp('Numero maximo de iteracoes alcancado.');
end
```

Exemplo

	False Position	**Secant**	**Newton**
n	p_n	p_n	p_n
0	0.5	0.5	0.7853981635
1	0.7853981635	0.7853981635	0.7395361337
2	0.7363841388	0.7363841388	0.7390851781
3	0.7390581392	0.7390581392	0.7390851332
4	0.7390848638	0.7390851493	0.7390851332
5	0.7390851305	0.7390851332	
6	0.7390851332		