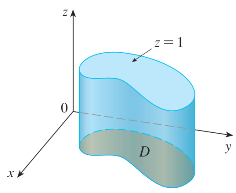
Cálculo III

Aplicações das integrais

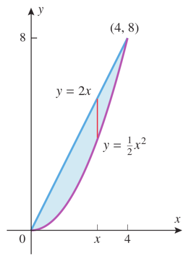
Prof. Adriano Barbosa

Área

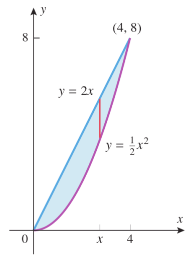


$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

Exemplo

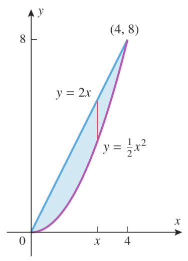


Exemplo



$$\iint_R dA = \int_0^4 \int_{x^2/2}^{2x} dy\, dx$$

Exemplo



$$\iint_R dA = \int_0^4 \int_{x^2/2}^{2x} dy\, dx = \int_0^4 \left[y\right]_{y=x^2/2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

Volume

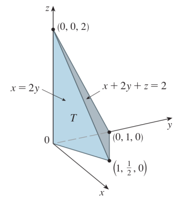
$$V(E) = \iiint_E dV$$

Exemplo

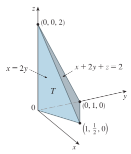
Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

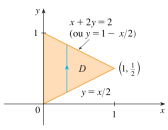
Exemplo

Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.



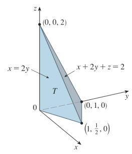
Exemplo

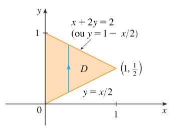




$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\,dy\,dx$$

Exemplo

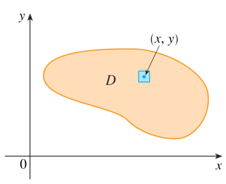




$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx = \tfrac{1}{3}$$

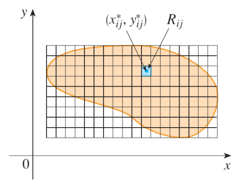
Massa e densidade



$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

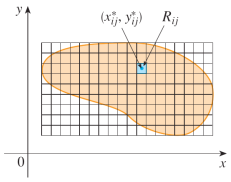
Massa e densidade

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$



$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Massa e densidade

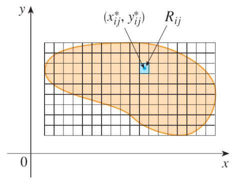


$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

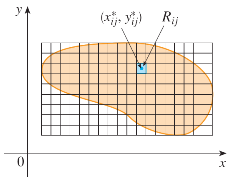
$$m = \lim_{k,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

Centro de massa



a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$

Centro de massa

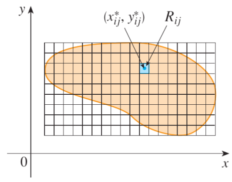


a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$

podemos aproximar o momento de R_{ij} com relação ao eixo x por $[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A]\, y_{ij}^*$

(Momento de uma partícula em relação a um eixo é o produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo.)

Centro de massa



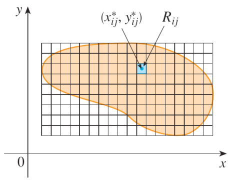
a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$

podemos aproximar o momento de R_{ij} com relação ao eixo x por $[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A]\, y_{ij}^*$

$$M_x = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y\, \rho(x, y)\, dA$$

(Momento de uma partícula em relação a um eixo é o produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo.)

Centro de massa



a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$

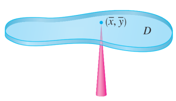
podemos aproximar o momento de R_{ij} com relação ao eixo x por $[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A]\, y_{ij}^*$

$$M_x = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y\, \rho(x, y)\, dA$$

$$M_y = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x\, \rho(x, y)\, dA$$

(Momento de uma partícula em relação a um eixo é o produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo.)

Centro de massa



$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\, \rho(x, y)\, dA$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\, \rho(x, y)\, dA$$

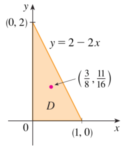
$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

Exemplo

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

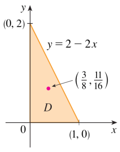
Exemplo

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



Exemplo

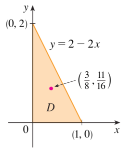
Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\, dy\, dx$$

Exemplo

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



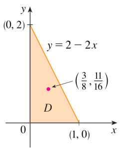
$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= 4 \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

Exemplo

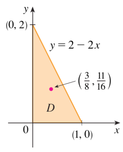
Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\, \rho(x, y)\, dA = \tfrac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\, dy\, dx$$

Exemplo

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



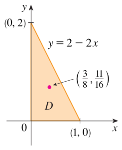
$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\, \rho(x, y)\, dA = \tfrac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\, dy\, dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3)\, dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

Exemplo

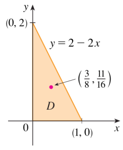
Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x, y)\,dA = \tfrac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}(y + 3xy + y^2)\,dy\,dx$$

Exemplo

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x, y)\,dA = \tfrac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}(y + 3xy + y^2)\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2} + 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2-2x}dx = \tfrac{1}{4}\int_0^1(7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[7x - 9\frac{x^2}{2} - x^3 + 5\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{11}{16}$$

Exercícios

Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x.

$\left(\tfrac{3}{8}, 3\pi/16\right)$

A região dentro do círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$

$\frac{16}{3}$