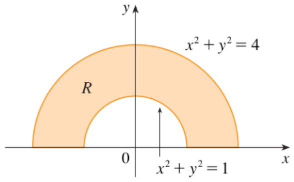
Cálculo III

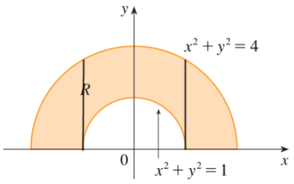
Coordenadas polares

Prof. Adriano Barbosa

Coordenadas polares

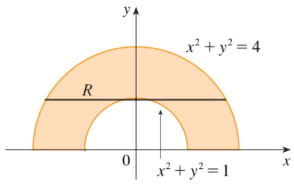


Coordenadas polares



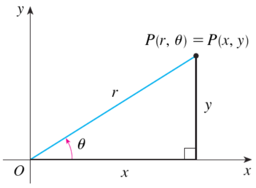
$$R_1 = \left\{(x, y); -2 \leq x \leq -1 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$$
$$R_2 = \left\{(x, y); -1 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$$
$$R_3 = \left\{(x, y); 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$$

Coordenadas polares



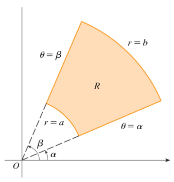
$$R_1 = \left\{(x, y); -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq -\sqrt{1 - y^2} \text{ e } 0 \leq y \leq 1\right\}$$
$$R_2 = \left\{(x, y); -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2} \text{ e } 1 \leq y \leq 2\right\}$$
$$R_3 = \left\{(x, y); \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2} \text{ e } 0 \leq y \leq 1\right\}$$

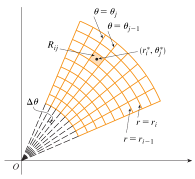
Coordenadas polares



$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Integração sobre regiões circulares





$$R_{ij} = \left\{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i,\ \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\right\}$$
$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

$$\Delta A_i = \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Integração sobre regiões circulares

Se f é contínua

R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, onde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Integração sobre regiões circulares

- Trocamos a variaçao do x e do y pela variação do raio e do ângulo;
- Trocamos na regra da função:

$$x \text{ por } r\cos\theta \text{ e } y \text{ por } r\text{sen}\theta.$$

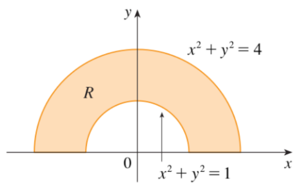
- Trocamos a variação dos retângulos cartesianos $dA = dx\, dy$ pela variação dos retângulos polares $r\, dr\, d\theta$.

Exemplo

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

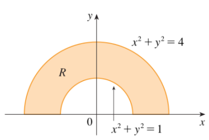
Exemplo

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.



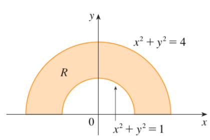
Exemplo

$$\iint_R (3x + 4y^2)\, dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta$$



$R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Exemplo



$R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

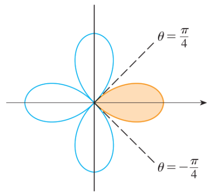
$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3 \operatorname{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[r^3\cos\theta + r^4 \operatorname{sen}^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^\pi (7\cos\theta + 15 \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right] d\theta \\
&= 7 \operatorname{sen}\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \operatorname{sen} 2\theta \Big]_0^\pi = \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$

Exemplo

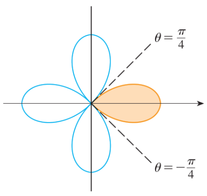
Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

Exemplo

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

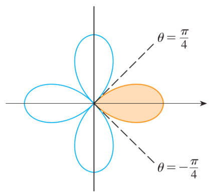


Exemplo



$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$$

Exemplo



$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$$

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

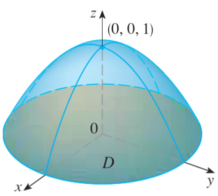
$$= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

Exemplo

Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Exemplo

Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.



Exemplo

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

Exemplo

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

Em coordenadas polares, D é dado por $0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

Exemplo

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

Em coordenadas polares, D é dado por $0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Exercícios

Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a.

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r\, dr\, d\theta$$

$3\pi/4$

Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares. $\iint_D x^2 y\, dA$, onde D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5

$\frac{1250}{3}$