Cap. 1 – Conjuntos

01/04/2022

Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos (elementos do conjunto).

Dados um conjunto A e um objeto qualquer a, vale perguntar se a pertence ao conjunto A.

$$a \in A \text{ ou } a \notin A$$

não existe terceira opção!
uma das opções deve valer!

Conjuntos vs Propriedades vs Condições

$a \in A \Leftrightarrow a$ goza da propriedade $P \Leftrightarrow a$ satisfaz a condição C

Conjuntos vs Propriedades vs Condições

$$a \in A \Leftrightarrow a \text{ goza da propriedade } P \Leftrightarrow a \text{ satisfaz a condição } C$$

Exemplo

$P : x \in \mathbb{Z}$ é par e $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
x goza da propriedade $P \Leftrightarrow x \in A$

Conjuntos vs Propriedades vs Condições

$$a \in A \Leftrightarrow a \text{ goza da propriedade } P \Leftrightarrow a \text{ satisfaz a condição } C$$

Exemplo

$P : x \in \mathbb{Z}$ é par e $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
x goza da propriedade $P \Leftrightarrow x \in A$

Exemplo

$C : y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 - 3y + 2 = 0$ e $B = \{1, 2\}$
y satisfaz a condição $C \Leftrightarrow y \in B$

Conjuntos

Vantagem:
existe uma álgebra: união, interseção e relação de inclusão

Notação:

- $A =$ conjunto dos números pares
- $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- ~~$A = \{$conjunto dos números pares$\}$~~ $A = \{$números pares$\}$
- $\varnothing =$ conjunto vazio $= \{x \mid x \neq x\}$ (ou qualquer propriedade contraditória)
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, conjunto vazio não é o mesmo que um conjunto que possui como único elemento o conjunto vazio.

Relação de inclusão

$A \subset B \Leftrightarrow$ se $x \in A$, então $x \in B \Leftrightarrow$ todo elemento de A também é elemento de $B \Leftrightarrow A$ é subconjunto de $B \Leftrightarrow A$ está contido em B.

Exemplo

T $=$ *conjunto dos triângulos*
P $=$ *conjunto dos polígonos do plano*
$T \subset P$

Relação de inclusão

$A \not\subset B \Leftrightarrow$ existe $x \in A$ tal que $x \notin B \Leftrightarrow$ algum elemento de A não é elemento de $B \Leftrightarrow A$ não é subconjunto de $B \Leftrightarrow A$ não está contido em B.

Exemplo

$P \not\subset T$. *Um quadrado é um polígono, mas não é um triângulo.*

Relação de inclusão

Qualquer que seja o conjunto A:

- $A \subset A$. Claramente todo elemento de A partence a A
- $\varnothing \subset A$. Se fosse $\varnothing \not\subset A$, teríamos que apresentar $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$, mas $x \in \varnothing$ é impossível.

Relação de inclusão

Propriedades:

- Reflexividade: $A \subset A$;
- Anti-simetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;
- Transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Relação de inclusão

A relação de inclusão está ligada com a implicação lógica.

Se P e Q são propriedades de um elemento genérico de U (universo), então P e Q definem conjuntos A e B dos elementos de U que gozam das propriedades P e Q, respectivamente.

$$P \Rightarrow Q \text{ é equivalente a dizer que } A \subset B$$

Relação de inclusão

Exemplo

U: *quadriláteros convexos do plano*

P: *quadriáteros com os 4 ângulos retos*

Q: *quadriláteros com lados opostos paralelos*

$A =$ *conjunto dos retângulos*

$B =$ *conjunto dos paralelogramos*

$P \Rightarrow Q$ *é equivalente a* $A \subset B$

Relação de inclusão

Exemplo

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$

(todo número que satisfaz a primeira equação também satisfaz a segunda)

$\{1, 2\} \subset \{-3, 1, 2\}$

(o conjunto solução da primeira equação está contido no conjunto solução da segunda equação)

Relação de inclusão

$Q \Rightarrow P$ é a recíproca de $P \Rightarrow Q$

A recíproca dos exemplos anteriores é falsa, pois nem todo paralelogramo é um retângulo e -3 é raiz da segunda equação, mas não é raiz da primeira.

Relação de inclusão

Por outro lado, se P é a propriedade de um triângulo ser retângulo com catetos x e y e hipotenuza z e Q a propriedade de valer $z^2 = x^2 + y^2$, então $P \Leftrightarrow Q$.

Relação de inclusão

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 3x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow & (x-1)(x-2) = 0 \\
\Leftrightarrow & x - 1 = 0 \ ou \ x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow & x = 1 \ ou \ x = 2 \\
\Leftrightarrow & x \in \{1, 2\}
\end{aligned}
$$

Relação de inclusão

Exemplo

$$\begin{aligned} & x^2+1=0 && (\textit{multiplicando por } x^2-1) \\ \Rightarrow & x^4-1=0 \\ \Leftrightarrow & x^4=1 \\ \Leftrightarrow & x \in \{-1,1\} \end{aligned}$$

Relação de inclusão

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 1 = 0 && (\textit{multiplicando por } x^2 - 1) \\
\Rightarrow & x^4 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow & x^4 = 1 \\
\Leftrightarrow & x \in \{-1, 1\}
\end{aligned}
$$

a primeira equação não possui solução real!

Complementar de um conjunto

Dados o conjunto universo U e um conjunto $A \subset U$, o complementar de A é o conjunto A^C formado pelos elementos de U que não pertencem a A.

Complementar de um conjunto

Dos princípios do terceiro excluído e da não-contradição, segue-se que:

1. Para todo $A \subset U$, tem-se $(A^C)^C = A$.
   De fato, $x \in (A^C)^C \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A$, logo $(A^C)^C = A$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.
   $(\Rightarrow) x \in B^C \Rightarrow x \notin B \overset{hip.}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A^C$
   $(\Leftarrow) x \in A \Rightarrow x \notin A^C \overset{hip.}{\Rightarrow} x \notin B^C \Rightarrow x \in B$

2'. $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, $\sim Q \Rightarrow \sim P$ (contrapositiva).

Complementar de um conjunto

Exemplo

P: *ser douradense* $\Rightarrow \sim P$: *não ser douradense*

Q: *ser sul-mato-grossense* $\Rightarrow \sim Q$: *não ser sul-mato-grossense*

Complementar de um conjunto

Exemplo

“se um número natural não é quadrado de um outro número natural, sua raiz quadrada é irracional.”

“se a raiz quadrada de um número natural é racional, então esse número natural é um quadrado.”

Complementar de um conjunto

Cuidado ao fazer a negação!

P: "todo homem é mortal"
~~$\sim P$: "nenhum homem é mortal"~~
$\sim P$: "existe (pelo menos) um homem imortal"

Reunião e interseção

$A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \textbf{ ou } x \in B$$

x goza da propriedade P **ou** x goza da propriedade Q

ou não é exclusivo!

Reunião e interseção

$A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \textbf{ e } x \in B$$

$$x \text{ goza da propriedade } P \textbf{ e } x \text{ goza da propriedade } Q$$

Reunião e interseção

Exemplo

$P : x^2 - 3x + 2 = 0,\ Q : x^2 - 5x + 6 = 0$

$A = \{1, 2\},\ B = \{2, 3\}$

x *goza da propriedade* P *ou* $Q \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow A \cup B = \{1, 2, 3\}$

x *goza da propriedade* P *e* $Q \Leftrightarrow x \in \{2\} \Leftrightarrow A \cap B = \{2\}$

Reunião e interseção

Propriedades:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Reunião e interseção

Ligação entre $\cup, \cap$ e $\subset$:

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Além disso,

$$A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C \text{ e } A \cap C \subset B \cap C$$

Leis de De Morgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$