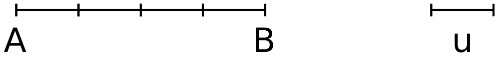
Cap. 4 – Números reais

06/05/2022

Segmentos (in)comensuráveis

Dados um segmento AB qualquer e um segmento u padrão (segmento unitário)

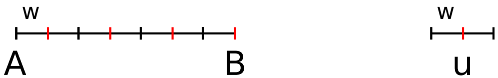


se u cabe n vezes em AB, diremos que a medida de AB é n. Denotaremos o comprimento do segmento AB por $\overline{AB}$.

Segmentos (in)comensuráveis

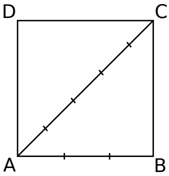
Quando não for possível, podemos procurar um segmento w que caiba n vezes em u e m vezes em AB. Se existir tal segmento w, dizemos que AB é comensurável e $\overline{w} = \frac{1}{n}$ e $\overline{AB} = \frac{m}{n}$.

Exemplo:



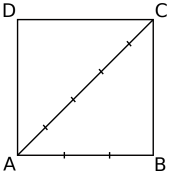
$$\overline{AB} = \frac{7}{2}, \overline{w} = \frac{1}{2}$$

Segmentos (in)comensuráveis



Se w cabe n vezes em AB e m vezes em AC e AB é a unidade de comprimento, então $\overline{AB} = 1$ e $AC = \frac{m}{n}$.

Segmentos (in)comensuráveis

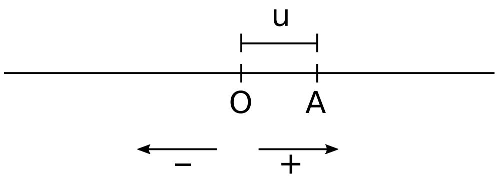


Se w cabe n vezes em AB e m vezes em AC e AB é a unidade de comprimento, então $\overline{AB} = 1$ e $AC = \frac{m}{n}$.
Logo,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

O segmento AC é incomensurável.

A reta real



Dado X na reta, se OA cabe n vezes em OX, dizemos que a abcissa de X é n se X está a direita de O ou $-n$ se está a esquerda de O. Se $X = O$, sua abcissa é zero.

$\mathbb{Z} =$ conjunto das abcissas de X tais que OA cabe um número exato de vezes em OX mais o zero.

$\mathbb{Q} =$ conjunto das abcissas de X tais que OX é comensurável em OA.

A reta real

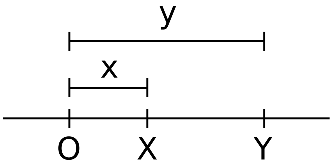
Se OX é incomensurável com OA, dizemos que o número (irracional) x é a abcissa de X e x é positivo ou negativo conforme está a direita ou a esquerda de O. x é a medida do segmento OX (por definição).

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números racionais e irrecionais. Existe uma correspondência biunívoca entre as abcissas dos pontos X de OA e o conjunto $\mathbb{R}$.

A reta real

Relação de ordem:

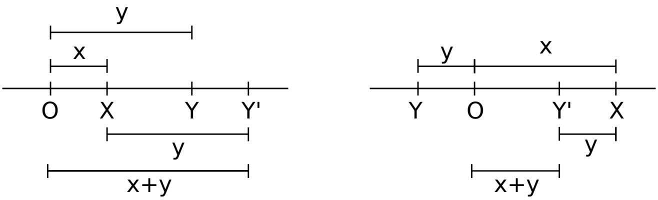
$$x < y \Leftrightarrow X \text{ está a esquerda de } Y$$



A reta real

Soma:

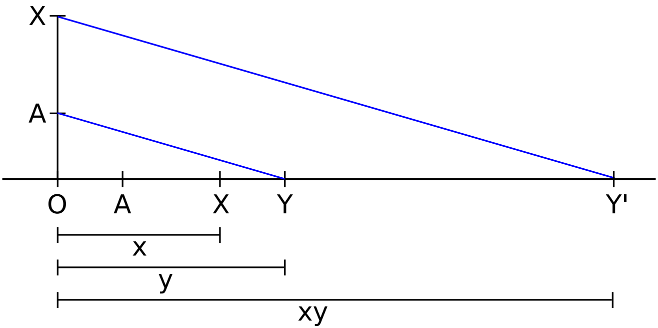
$x + y$ é a abcissa de Y' se XY' tem o mesmo comprimento e sentido de OY



A reta real

Produto:
Construa os triângulos de modo que $AY//XY'$ e por semelhança de triânguos:

$$\frac{y}{1} = \frac{\overline{OY'}}{x} \Rightarrow \overline{OY'} = xy$$



A reta real

$\mathbb{R}$ é um

- corpo: as quatro operações e suas propriedades estão definidas
- ordenado: relação de ordem e sua ligação com as operações
- completo: sequências convergentes de números reais convergem para números reais

$\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, mas não é completo.
Ex.: 3, 3,1, 3,14, 3,141, 3,1415, . . . converge para $\pi \notin \mathbb{Q}$

Expressões decimais

Todo número real α tem uma expressão decimal (não única)[1]

$$\alpha = \overbrace{a_0}^{\text{pate inteira}}, \overbrace{a_1 a_2 a_3 \dots}^{\text{dígitos}}$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

[1] $0,9999999999999\ldots = 1$

Expressões decimais

Se

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

então α_n aproxima α e o erro da aproximação é no máximo $\frac{1}{10^n}$.
De fato,

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_n &= \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots \\ &= 0,\underbrace{0\ldots0}_{\text{n}}\,a_{n+1}a_{n+2}\ldots \\ &\leq 0,\underbrace{0\ldots0}_{\text{n-1}}\,1 = \frac{1}{10^n} \end{aligned}$$

$$\left(0,9999999999\ldots = 1 \xrightarrow{(\div 10^n)} 0,\overbrace{0\ldots0}^{\text{n}}\,99999\ldots = 0,\overbrace{0\ldots0}^{\text{n-1}}\,1\right)$$

Expressões decimais

Além disso,
a_0 é o maior inteiro tal que $a_0 \leq \alpha$
a_1 é o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$
a_2 é o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha$
$\vdots$
a_n é o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq \alpha$

Dessa forma, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$ é uma sequência crescente de valores que se aproximam de α.

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$$

Expressões decimais

Casos interessantes:

- $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n 000 \ldots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ é racional e uma fração decimal.
- $0,999\ldots = 1$. De fato,
  $\alpha_1 = 0,9 \Rightarrow 1 - \alpha_1 = 0,1 = \frac{1}{10}$
  $\alpha_2 = 0,99 \Rightarrow 1 - \alpha_2 = 0,01 = \frac{1}{10^2}$
  $\vdots$
  $\alpha_n = 0,99\ldots 9 \Rightarrow 1 - \alpha_n = 0,0\ldots 01 = \frac{1}{10^n}$
  Mas, $\frac{1}{10^n}$ pode ser tão pequeno quando se queira. Logo, só pode ser $0,999\ldots = 1$.

Expressões decimais

Casos interessantes:

- $1 = 0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots$
  $\xRightarrow{(\div 9)} \frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots = 0,111\ldots$
  $\xRightarrow{(\times a)} 0,aaa\ldots = \frac{a}{9}$

  Ex.: $0,555\ldots = \frac{5}{9}$

Expressões decimais

Casos interessantes:

- Observe que $\frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} = \frac{90+9}{10^{n+1}} = \frac{99}{10^{n+1}}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}\right) + \left(\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4}\right) + \left(\frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6}\right) + \cdots \\
&= \frac{99}{10^2} + \frac{99}{10^4} + \frac{99}{10^6} + \cdots + \frac{99}{10^{2n}} + \cdots \\
&= \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \frac{99}{100^3} + \cdots + \frac{99}{100^n} + \cdots \\
&= 99\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots + \frac{1}{100^n} + \cdots\right) \\
\Rightarrow \frac{1}{99} &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots + \frac{1}{100^n} + \cdots
\end{aligned}
$$

Dízimas periódicas

A (fração) geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.

Ex.: $\frac{42}{99} = \frac{42}{100} + \frac{42}{100^2} + \cdots + \frac{42}{100^n} + \cdots = 0,424242\ldots$

Dízimas periódicas

Para dízimas periódicas compostas, fazemos como no exemplo:

$$\alpha = 0,\underbrace{042}_{\text{3 díg.}}123123\ldots$$

$$\xrightarrow{(\times 10^3)} 1000\alpha = 42,123123\ldots = 42 + 0,\underbrace{123123123\ldots}_{\text{dízima simples}}$$

$$\Rightarrow 1000\alpha = 42 + \frac{123}{999} = \frac{42 \cdot 999 + 123}{999} = \frac{42081}{999}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{42081}{999000}$$

Expressões decimais

De modo geral, representações decimais periódicas representam números racionais. Reciprocamente, números racionais têm representação decimal periódica.
"Divisão continuada":

$$\frac{6}{11} = 0{,}5454\ldots \qquad \begin{array}{rl} 60 & \big| \ \underline{11} \\ \underline{-55} & \ \ 0{,}54 \\ 50 & \\ \underline{-44} & \\ 60 & \end{array}$$

Como na divisão por q só pode ocorrer restos $0, 1, 2, \ldots, q-1$, após no máximo q divisões um resto vai se repetir (princípio da casa dos pombos) e a partir daí os dígitos do quociente se repetirão.

Expressões decimais

A correspondência entre a representação decimal e os números reais é sobrejetiva. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, tomando sucessivamente

a_0 o maior inteiro tal que $a_0 \leq \alpha$

a_1 o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$

$\vdots$

a_n o maior dígito tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq \alpha$

$\Rightarrow \alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$

Ex.: $\pi = 3,1415965\ldots$, pois

$$3 < \pi < 4$$

$$3,1 < \pi < 3,2$$

$$3,14 < \pi < 3,15$$

$$3,141 < \pi < 3,142$$

Expressões decimais

Por outro lado,
$0,99999\ldots = 1$ e $3,27599999\ldots = 3,276$, por exemplo.

Descartando as expressões decimais que terminam por uma sequência de noves, temos uma correspondência biunívoca entre as representações decimais e os números reais.

Opreções com expressões decimais

Não é possível operar utilizando as representações decimais diretamente, pois as operações funcionam da direita para a esquerda. Para isso, dados $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots$ e $\beta = b_0, b_1 b_2 \ldots$, tomamos as aproximações α_n e β_n e temos que:

$$\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$$

$$\alpha_n - \beta_n \to \alpha - \beta$$

$$\alpha_n \cdot \beta_n \to \alpha \cdot \beta$$

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to \frac{\alpha}{\beta}$$

Não enumerabilidade dos reais

Não pode existir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetiva.

$$f(1) = a_0^1, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots$$
$$f(2) = a_0^2, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots$$
$$f(3) = a_0^3, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \dots$$

Tomando y cuja representação decimal é

$$0, \underline{\neq a_1^1} \;\; \underline{\neq a_2^2} \;\; \underline{\neq a_3^3} \;\; \dots,$$

temos que $y \neq f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ (diagonal de Cantor).

Portanto, o conjunto dos números reais é não enumerável, ou seja, a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é maior que a de $\mathbb{N}$.

Desigualdades: reais positivos

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Propriedades básicas dos números reais positivos:

P1) Dado $x \in \mathbb{R}$: ou $x > 0$ ou $x = 0$ ou $-x > 0$;

P2) Soma e produto de dois reais positivos resulta num real positivo.

Dizer que $x < y$ é equivalente a dizer que $y - x > 0$.

Desigualdades: propriedades

- Tricotomia: ou $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

  Basta observar $y - x$. Por P1:
  ou $y - x > 0 \Leftrightarrow x < y$
  ou $y - x = 0 \Leftrightarrow x = y$
  ou $-(y - x) > 0 \Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow y < x$
- Transitividade: se $x < y$ e $y < z$, então $x < z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

  $y - x > 0$ e $z - y > 0$, logo $z - x = (z - y) + (y - x) > 0$
- Monotonicidade da adição: se $x < y$, então $x + z < y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

  $y - x > 0$, logo $y + z - (x + z) = y - x > 0$
  (se $x < y$ e $x' < y'$, então $x + x' < y + y', \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}$)

Desigualdades: propriedades

- Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$. Se $z < 0$, então $yz < xz$.
  - $z > 0$ e $y - x > 0$, por P2, $z(y-x) > 0 \Leftrightarrow yz - xz > 0 \Leftrightarrow xz < yz$
  - $z < 0$ e $y - x > 0$, por P2, $-z(y-x) > 0 \Leftrightarrow -yz + xz > 0 \Leftrightarrow yz < xz$

  (se $x < y$ e $x' < y'$, então $xx' < yy', \forall x', y', y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$)
- $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

  Por P1:
  ou $x > 0 \overset{P2}{\Longrightarrow} x^2 > 0$

  ou $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$
  ou $-x > 0 \overset{P2}{\Longrightarrow} x^2 = (-x)(-x) > 0$

Desigualdades: propriedades

- Se $0 < x < y$, então $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

  Dado $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, pois $\frac{1}{x} = x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$.

  $$x < y \xRightarrow{\left(\times \frac{1}{x}\right)} 1 < \frac{y}{x} \xRightarrow{\left(\times \frac{1}{y}\right)} \frac{1}{y} < \frac{1}{x}, \text{ pois } \frac{1}{x}, \frac{1}{y} > 0$$

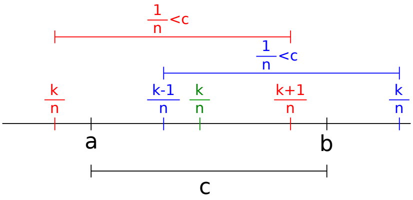
Intervalos

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\},(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$$
$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\},(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$$
$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\},[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$$
$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\},(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Intervalos

Todo intervalo não-degenerado contém números racionais e irracionais.

De fato, observe o intervalo (a, b) com $a < b$.
Tome $c = b - a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{c} \Rightarrow c > \frac{1}{n}$.
Assim, como os racionais $\ldots, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ estão por toda reta real e a distância entre dois consecutivos é $\frac{1}{n} < c$, devemos ter algum desses racionais em (a, b).



Intervalos

Analogamente, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\sqrt{2}}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n} < c$, tem-se algum dos irracionais $\pm\frac{\sqrt{2}}{2n}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{2n}, \pm\frac{3\sqrt{2}}{2n}, \ldots$ no intervalo (a, b).

$$\left(\frac{(k+1)\sqrt{2}}{2n} - \frac{k\sqrt{2}}{2n} = \frac{\sqrt{2}}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{n} < c\right)$$

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

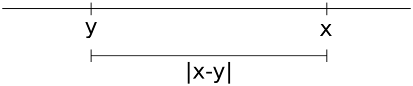
ou

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

ou

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

ou

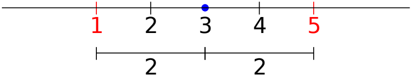


Valor absoluto

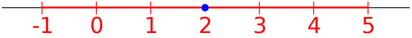
Observe que $|x| \geq 0$, sendo $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Exemplo:

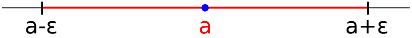
- $|x-3| = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 5$



- $|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$



- $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$



Valor absoluto

Propriedades:

- $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

  Temos $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$. Logo, $x + y \leq |x| + |y|$.
  Além disso,
  $$\left.\begin{array}{l} -x \leq |x| \Rightarrow x \geq -|x| \\ -y \leq |y| \Rightarrow y \geq -|y| \end{array}\right\} \Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y$$
  $\therefore -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$

- $|xy| = |x||y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

  $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 \Rightarrow |xy| = |x||y|$

Sequências e profressões

$$
\begin{aligned}
x : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto x(n) = x_n
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)$$

Sequências e progressões

Exemplo:

- Uma PA é uma sequência tal que $x_{n+1} = x_n + r$, logo $r = x_{n+1} - x_n$.

  $$x_1, \underbrace{x_1 + r}_{x_2}, (x_1 + r) + r = \underbrace{x_1 + 2r}_{x_3}, \dots, \underbrace{x_1 + (n-1)r}_{x_n}, \dots$$

  é crescente se $x_n < x_{n+1}$, logo $x_n < x_n + r \Leftrightarrow 0 < r$
  é decrescente se $x_n > x_{n+1}$, logo $x_n > x_n + r \Leftrightarrow r < 0$
- Uma PG é uma sequência tal que $x_{n+1} = x_n \cdot r$, logo $r = \frac{x_{n+1}}{x_n}$

  $$x_1, \underbrace{x_1 \cdot r}_{x_2}, (x_1 \cdot r) \cdot r = \underbrace{x_1 \cdot r^2}_{x_3}, \dots, \underbrace{x_1 \cdot r^{n-1}}_{x_n}, \dots$$

Sequências monótonas

Uma sequência é dita

- crescente quando $x_n < x_{n+1}$;
- não-crescente quando $x_n \leq x_{n+1}$;
- decrescente quando $x_n > x_{n+1}$;
- não-decrescente quando $x_n \geq x_{n+1}$;
- monótona quando é (não)crescente ou (não)decrestente;
- limitada superiormente quando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$;
- limitada inferiormente quando existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$;
- limitada quando é limitada inferiormente e superiormente.

Sequências monótonas

Exemplo:

- $x_n = \frac{n}{n+1}$ é crescente e limitada.

  $$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1 \Rightarrow x_n < x_{n+1}$$

  e $n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow x_n < 1$

- $x_n = n$ é crescente e ilimitada.

  $n < n+1, \forall n \in \mathbb{N}$
  dado $M \in \mathbb{R}$, $\lfloor M \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ e $x_{\lfloor M \rfloor + 1} > M$

Sequências monótonas

Se $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \leq \cdots$ é uma sequência limitada não-decrescente de números naturais, então a partir de algum k_0 a sequência será constante.

Sequências monótonas

X é um conjunto de valores aproximados por falta de α se:

- $x \leq \alpha, \forall x \in X$;
- dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $0 \leq \alpha - x < \varepsilon$.

Sequências monótonas

Teorema: Toda sequência (x_n) monótona limitada forma um conjunto de valores aproximados por falta de um número real α.

Tratando o caso onde $x_n > 0$ e $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \ldots$ com representações decimais

$$x_1 = a_0^1, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots$$

$$x_2 = a_0^2, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_0^n, a_1^n a_2^n a_3^n \ldots$$

$$\vdots$$

(a_k^n) (seq. vertical) é uma sequência limitada não-decrescente de naturais, logo deve ser constante a partir de um n_k. Tome $n_k < n_{k+1}$.

Sequências monótonas

Tomando $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$, onde $a_k = a^k_{n_k}$, temos:
$x_n \leq \alpha$, pois $a^n_k \leq a^{n_k}_k$
e
se $n > n_k$, então $0 \leq \alpha - x_n < \frac{1}{10^k}$, pois os k primeiros dígitos de α e x_n são iguais. Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar k suficientemente grande de modo que $\frac{1}{10^k} < \varepsilon$ e temos $0 \leq \alpha - x_n < \varepsilon, \forall n \leq n_k$.