Cap. 5 – Funções afins

13/05/2022

Produto cartesiano

Dados X e Y, o produto cartesiano $X \times Y$ é formado pelos pares ordenados (x, y), onde $x \in X$ e $y \in Y$. Se $n(X) = n$ e $n(Y) = m$, então $n(X \times Y) = nm$.

Exemplo: Se $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$

$$
\begin{array}{c|cccc}
y_3 & (x_1, y_3) & (x_2, y_3) & (x_3, y_3) & (x_4, y_3) \\
y_2 & (x_1, y_2) & (x_2, y_2) & (x_3, y_2) & (x_4, y_2) \\
y_1 & (x_1, y_1) & (x_2, y_1) & (x_3, y_1) & (x_4, y_1) \\
\hline
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
X \times Y = \{&(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_4, y_1), \\
&(x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_4, y_2), \\
&(x_1, y_3), (x_2, y_3), (x_3, y_3), (x_4, y_3)\}
\end{aligned}
$$

Relações

Uma relação R entre os elementos de X e Y é uma condição (ou conjunto de condições) que permite determinar se $x \in X$ está relacionado com $y \in Y$. Quando a condição é satisfeita, escrevemos xRy.

Exemplos:

- $xRy \Leftrightarrow y - x > 0$ (relação de ordem)
- $xRy \Leftrightarrow f : X \to Y, y = f(x)$

Relações

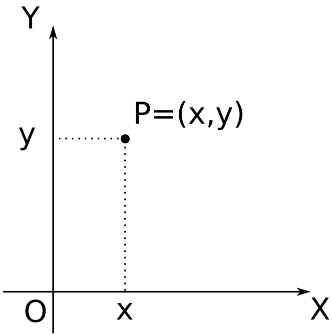
O gráfico de uma relação R é o subconjunto de $X \times Y$ formado pelos pares (x, y) tais que xRy: $G(R) = \{(x, y) \mid xRy\}$.

Exemplo: $G(f) = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$

O plano numérico $\mathbb{R}^2$

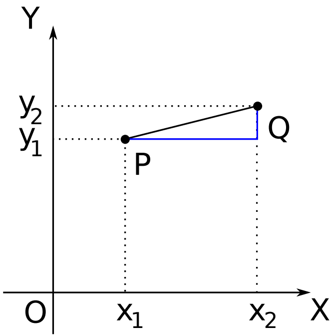
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

O plano π formado pelos eixos OX e OY é seu modelo geométrico. $P = (x, y)$ é um par ordenado (nome aritmético) ou ponto (nome geométrico).



O plano numérico $\mathbb{R}^2$

$$d(P,Q)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$\Rightarrow d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



O plano numérico $\mathbb{R}^2$

Exemplo: Dado $r > 0$, os pontos $P = (x, y)$ que distam r do ponto $O = (0, 0)$ são pontos que estão numa circunferência de centro em O e raio r.

$$r = d(P, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

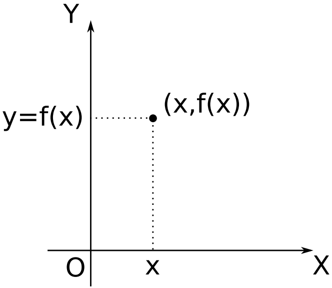
De modo geral, se o centro da circunferência é $C = (a, b)$, temos

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

O plano numérico $\mathbb{R}^2$

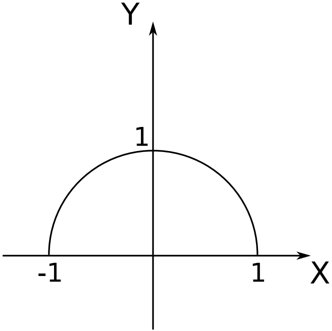
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$



O plano numérico $\mathbb{R}^2$

Exemplo: O gráfico de $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é



$$y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{1 - x^2}$$

A função afim

Uma função chama-se afim se pode ser escrita como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.

Observe que:

- $f(0) = a0 + b = b$;
- $\left.\begin{array}{l} f(x_1) = ax_1 + b \\ f(x_2) = ax_2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b)$

  $\Rightarrow a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \forall x_1 \neq x_2$

---

a é a taxa de variação de f

A função afim

Exemplo: O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim, onde b é o valor da bandeirada, x é a distância percorrida e a é o preço por quilômetro rodado.

Exercício: Mostre que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical.

A função afim

Podemos determinar uma função afim sabendo seu valor em apenas dois pontos distintos:

$$\begin{cases} ax_1 + b = f(x_1) \\ ax_2 + b = f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, b = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

Além disso, toda reta não vertical é gráfico de alguma função afim.

A função linear

A função linear

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

é um modelo para proporcionalidade.

Proporcionalidade

Proporcionalidade direta: preço de um produto, 1kg=R$3,00.

kg	R$
1	$3,00$
2	$6,00$
3	$9,00$

$$f(x) = 3x$$

Proporcionalidade

Proporcionalidade inversa: tempo de viagem, 100km=1h.

km/h	h
100	1
50	2
25	4

$$f(x) = \frac{100}{x}$$

Proporcionalidade

Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$f(cx) = cf(x), \forall c, x \in \mathbb{R}$ (proporcionalidade direta)
ou
$f(cx) = \frac{f(x)}{c}, \forall x \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa)

Proporcionalidade

Pondo $a = f(1)$, tem-se:

$f(c) = f(c \cdot 1) = cf(1) = ca \Rightarrow f(c) = ac, \forall c \in \mathbb{R}$

ou

$$f(c) = f(c \cdot 1) = \frac{f(1)}{c} = \frac{a}{c} \Rightarrow f(c) = \frac{a}{c}, \forall c \neq 0$$

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema Fundamental da Proporcionalidade:
Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é (de)crescente, são equivalentes:

1. $f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$;
2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ (logo $f(cx) = cf(x), \forall c, x \in \mathbb{R}$);
3. $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Prova:

2.⇒3.

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

3.⇒1.

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n}$$
$$= nf(x), \forall n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

1.$\Rightarrow$2.

Provemos 1. para $r \in \mathbb{Q}$: $r = \dfrac{m}{n} \Leftrightarrow m = nr$

$$nf(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x)$$
$$\Rightarrow f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = rf(x), \forall r \in \mathbb{Q}$$

Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, pondo $f(1) = a$, temos $0 < 1 \Rightarrow f(0) \overset{>}{<} f(1) \Rightarrow 0 \overset{>}{<} a$. Logo,

$$f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = ar, \forall r \in \mathbb{Q}$$

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Mostremos agora para $x \in \mathbb{R}$. Suponha que exista x irracional tal que $f(x) \neq ax$, logo $f(x) < ax$ ou $f(x) > ax$. Se $f(x) < ax$, temos $\frac{f(x)}{a} < x$.
Se $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x \overset{(a>0)}{\Rightarrow} f(x) < ar < ax \Rightarrow f(x) < f(r) < ax$$

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Mostremos agora para $x \in \mathbb{R}$. Suponha que exista x irracional tal que $f(x) \neq ax$, logo $f(x) < ax$ ou $f(x) > ax$. Se $f(x) < ax$, temos $\frac{f(x)}{a} < x$.
Se $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x \overset{(a>0)}{\Rightarrow} f(x) < ar < ax \Rightarrow f(x) < f(r) < ax$$

Absurdo, pois f é crescente.
O caso $f(x) > ax$ é análogo.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Mostremos agora para $x \in \mathbb{R}$. Suponha que exista x irracional tal que $f(x) \neq ax$, logo $f(x) < ax$ ou $f(x) > ax$. Se $f(x) < ax$, temos $\frac{f(x)}{a} < x$.
Se $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x \underset{(a<0)}{\overset{(a>0)}{\Rightarrow}} \underset{ax<ar<f(x)}{f(x) < ar < ax} \Rightarrow f(x) < f(r) < ax$$

Absurdo, pois f é $\underset{\text{decrescente}}{\text{crescente}}$.
O caso $f(x) > ax$ é análogo.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Pelo Teorema, para garantir que f é linear, basta verificar que f é crescente (ou decrescente) e que $f(nx) = xf(x), \forall \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Se x é a distância percorrida e $f(x)$ é o consumo de um carro ao percorrer a dsitância x, temos que f é crescente, pois quanto mais se anda, maior o consumo.
Além disso, $f(nx) = xf(x)$, pois um carro percorrendo a distância nx consume o mesmo que esse mesmo carro percorrendo n vezes a distância x.

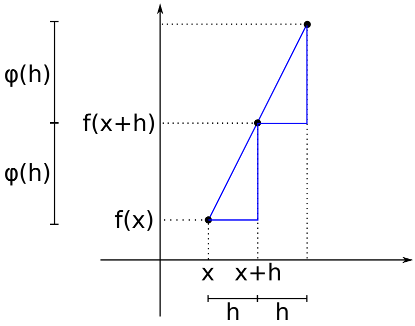
Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Como, na demonstração, a monotonicidade de f foi usada apenas para mostrar que 1.⇒2., poderíamos substituir a hipótese "f (de)crescente" no Teorema por "f contínua".
De fato, todo número real x é limite de uma sequência de racionais, logo

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) \overset{f\in C^0}{=} \lim_{n\to\infty} f(r_n) \underset{\text{p/ rac.}}{\overset{\text{vale 2.}}{=}} \lim_{n\to\infty} ar_n = a \lim_{n\to\infty} r_n = ax$$

Caracterização da função afim

f é afim se, e somente se, f é (de)crescente e se $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender só de h.



Caracterização da função afim

Prova:
Suponha f crescente (o caso decrescente é análogo), logo φ é crescente e

$$\begin{aligned}\varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x) \\ &= \underbrace{f(x+h+k) - f(x+h)}_{\varphi(k)} + \underbrace{f(x+h) - f(x)}_{\varphi(h)} \\ &= \varphi(h) + \varphi(k)\end{aligned}$$

Pelo TFP, pondo $a = \varphi(1)$, $\varphi(h) = ah, \forall h \in \mathbb{R}$.

Caracterização da função afim

Assim,

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = ah &\Rightarrow f(0+h) - f(0) = ah \\ &\Rightarrow f(h) = ah - \underbrace{f(0)}_{b} = ah + b, \forall h \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $f(x) = ax + b$, então

$$f(x+h) - f(x) = a(x+h) + b - ax - b = ah$$

depende apenas de h.

Caracterização da função afim

Exemplo:

- número do sapato $\times$ tamanho do pé em cm
- temperatura em Celsius $\times$ temperatura em Fahrenheit
- distância percorrida $\times$ valor da corrida do táxi

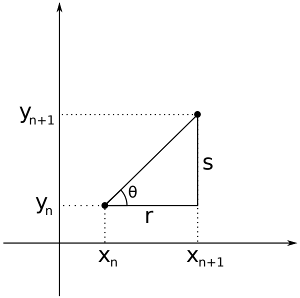
Caracterização da função afim

Exemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x_n) = y_n$, onde (x_n) e (y_n) são PAs:
$x_{n+1} = x_n + r$, $y_{n+1} = y_n + s$

$$\begin{aligned} f(x_n + r) - f(x_n) &= f(x_{n+1}) - f(x_n) = y_{n+1} - y_n \\ &= y_n + s - y_n = s = ar = \varphi(r) \end{aligned}$$

$\therefore f$ é afim.

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{s}{r} \\ \Rightarrow s &= \tan\theta \cdot r \\ \Rightarrow s &= ar \end{aligned}$$



Caracterização da função afim

Reciprocamente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim e (x_n) é uma PA, então $y_n = f(x_n)$ é uma PA.

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n) \\ &= ax_{n+1} + b - ax_n - b \\ &= a(x_n + r) - ax_n \\ &= ar \end{aligned}$$