Cálculo III

Teorema de Green

Prof. Adriano Barbosa

Teorema (Green)

Sejam C uma curva

- *simples*
- *fechada*
- *suave por partes*
- *orientada positivamente*

$$+$$

D uma região delimitada por C

$$+$$

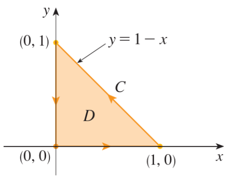
P e Q com derivadas parciais contínuas, onde $F = (P, Q)$

$$\Downarrow$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P\ dx + Q\ dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ dA$$

Exemplo

Calcule $\int_C x^4\ dx + xy\ dy$, onde C é a curva triangular construída pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$, e de $(0,1)$ a $(0,0)$.



$$\int_{C_1} x^4\ dx + xy\ dy + \int_{C_2} x^4\ dx + xy\ dy + \int_{C_3} x^4\ dx + xy\ dy$$

Exemplo

Aplicando o Teorema de Green (valem as hipóteses?):

$$F(x, y) = (x^4, xy)$$
$$P(x, y) = x^4 \text{ e } Q(x, y) = xy$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

$$\int_C x^4\ dx + xy\ dy = \iint_D y\ dA$$

Exemplo

Resolvendo a integral:

$$\begin{aligned}\iint_D y\ dA &= \int_0^1 \int_0^{1-x} y\ dy\ dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} \right)\ dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\ dx \\ &= -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\ dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\ dy$, onde $C : x^2 + y^2 = 9$.

Por Green (hipósteses?):

$$F(x, y) = (3y - e^{\operatorname{sen} x}, 7x + \sqrt{y^4 + 1})$$

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \iint_D 7 - 3\ dA \\ &= 4 \iint_D dA \\ &= 4 \cdot \text{área}(D) \\ &= 4 \cdot \pi (3)^2 = 36\pi\end{aligned}$$

Área

$$\text{área}(D) = \iint_D dA$$

Se $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, então

$$\begin{cases} P = 0, Q = x \\ P = -y, Q = 0 \\ P = -\frac{1}{2}y, Q = \frac{1}{2}x \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

$$\text{área}(D) = \int_C x\ dy = -\int_C y\ dx = \frac{1}{2}\int_C x\ dy - y\ dx$$

Exemplo

Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$r(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\, t),\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{aligned} A = \iint_D dA &= \frac{1}{2}\int_C x\ dy - y\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t) - (b\,\text{sen}\, t)(-a\,\text{sen}\, t)\ dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \text{sen}^2 t\ dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \pi ab \end{aligned}$$

Exercício

Calcule a integral $\int_C (x-y)\ dx + (x+y)\ dy$, onde C é o círculo de centro na origem e raio 2, diretamente e utilizando o Teorema de Green.

Calcule a área entre um arco da cicloide $r(t) = (t - \text{sen}\, t, 1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$ e o eixo x.