1	
2	
3	
4	
5	
6	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Números e Funções Reais — Avaliação AV1
Prof. Adriano Barbosa

PROFMAT 12/05/2018

Aluno(a):...

1. Dados conjuntos A, B e C, mostre que:

   (a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

   (b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

2. Uma sequência (a_n) é tal que $a_1 = 1$ e
$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1}$$
para todo $n \geq 1$. Mostre que os valores de a_n, para $n \geq 2$ são todos iguais.

3. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ duas funções. Prove que:

   (a) se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

   (b) se $f \circ g$ sobrejetiva, então f é sobrejetiva.

4. (a) Se $r \neq 0$ é um número racional, prove que $r\sqrt{2}$ é irracional.

   (b) Dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, prove que existe um número irracional α tal que $0 < \alpha < \varepsilon$.

   (c) Mostre que todo intervalo $[a, b]$, com $a < b$, contém algum número irracional.

5. Sejam x e y números reais quaisquer.

   (a) Mostre que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

   (b) Mostre que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

6. Um pequeno barco a vela, com 5 tripulantes, deve atravessar o oceano em 30 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de 2 litros de água por dia (e é o que os tripulantes fazem). Após 13 dias de viagem, o barco encontra 2 náufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

   (a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prossegur como antes?

   (b) Se os 7 ocupantes de agora continuarem consumindo 2 litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

Boa Prova!

① a) Tomando $x \in A-(B \cup C)$ temos:

$x \in A$ e $x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C \Rightarrow x \in A-B$ e $x \in A-C$

$\Rightarrow x \in (A-B) \cap (A-C)$

Logo, $A-(B \cup C) \subset (A-B) \cap (A-C)$.

Por outro lado, se $x \in (A-B) \cap (A-C)$, tem-se:

$x \in A-B$ e $x \in A-C \Rightarrow (x \in A$ e $x \notin B)$ e $(x \in A$ e $x \notin C) \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A-(B \cup C)$.

Assim, $(A-B) \cap (A-C) \subset A-(B \cup C)$.

Portanto, $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$.

b) Se $x \in A-(B \cap C)$, temos

$x \in A$ e $x \notin B \cap C \Rightarrow x \in A$ e $(x \notin B$ ou $x \notin C)$

$\Rightarrow (x \in A$ e $x \notin B)$ ou $(x \in A$ e $x \notin C) \Rightarrow x \in A-B$ ou $x \in A-C$

$\Rightarrow x \in (A-B) \cup (A-C)$

Logo, $A-(B \cap C) \subset (A-B) \cup (A-C)$.

Se $x \in (A-B) \cup (A-C)$, então

$x \in A-B$ ou $x \in A-C \Rightarrow (x \in A$ e $x \notin B)$ ou $(x \in A$ e $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ e $(x \notin B$ ou $x \notin C) \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B \cap C$

$\Rightarrow x \in A-(B \cap C)$

Assim, $(A-B) \cup (A-C) \subset A-(B \cap C)$.

Portanto, $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$.

② Observando a sequência, temos que:

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{a_1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{a_1+a_2}{2+1} = \frac{1+\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

$a_4 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3+1} = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{4}{2}}{4} = \frac{1}{2}$

$\vdots$

Usando indução sobre n, supondo que $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \frac{1}{2}$, mostremos que $a_{n+1} = \frac{1}{2}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{1 + \overbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}^{n-1}}{n+1} = \frac{1 + \frac{n-1}{2}}{n+1} = \frac{\frac{2+n-1}{2}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2}}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, pelo princípio de indução, temos que $a_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 2$.

③ Temos $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$

a) Se $g \circ f$ é injetiva então $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$, $\forall x, y \in X$.

Assim,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in X.$$

Portanto, f é injetiva.

b) $f \circ g: Y \to Y$ é sobrejetiva, logo, dado $y \in Y$, existe $y' \in Y$ tal que $(f \circ g)(y') = y$. Assim, $x = g(y') \in X$ é tal que

$$f(x) = f(g(y')) = (f \circ g)(y') = y, \quad \forall y \in Y \text{ dado}.$$

Portanto, f é sobrejetiva

④ a) seja $r = \frac{m}{n}$. Supondo $r\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, temos $r\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, logo

$$\frac{m}{n}\sqrt{2} = \frac{p}{q} \overset{(r\neq 0)}{\Rightarrow} \sqrt{2} = \frac{pn}{qm} \in \mathbb{Q}.$$ Absurdo, pois $\sqrt{2}$ é irracional.

Portanto, $r\sqrt{2}$ é irracional, qualquer que seja r racional não-nulo.

b) Dado $\varepsilon > 0$, tome n natural tal que $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$. Como $0 < \frac{\sqrt{2}}{n}$, temos $\frac{\sqrt{2}}{n} \in (0, \varepsilon)$ e, pelo item a), $\frac{\sqrt{2}}{n}$ é irracional.

c) Livro texto, pg. 62 e 63

⑤ a) Temos que:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq |x| \\ y \leq |y| \end{array}\right\} \Rightarrow x + y \leq |x| + |y| \quad \text{I}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} -x \leq |x| \\ -y \leq |y| \end{array}\right\} \Rightarrow -x - y \leq |x| + |y| \Rightarrow x + y \geq -(|x| + |y|) \quad \text{II}$$

De I e II segue-se que

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \iff |x + y| \leq |x| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

b) Temos que:

$$|x| = |x - y + y| \overset{(a)}{\leq} |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{I}$$

e

$$|y| = |y - x + x| \overset{(a)}{\leq} |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|y - x| = -|x - y| \quad \text{II}$$

De I e II temos:

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \iff \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

⑥ O suprimento total de água do barco é $2 \cdot 30 \cdot 5 = 300L$. Logo, o consumo diário de todos os tripulantes durante a viagem é de $10L/dia$. Após 13 dias de viagem foram consumidos $130L$, restando $170L$ de água no barco. Após o resgate dos 2 náufragos o suprimento restante de $170L$ deve ser dividido por 7 pessoas igualmente (como antes) e durar os 17 dias restantes de viagem. Dessa forma, o consumo diário do barco passa a ser $170 \div 17 = 10 L/dia$ e dividindo pelos 7 tripulantes, cada um terá direito a $10 \div 7 \approx 1{,}42 L/dia$.

Caso os 7 ocupantes continuem consumindo $2L/dia$, o suprimento de $170L$ irá durar $170 \div 7 \cdot 2 \approx 12{,}1$ dias