1	
2	
3	
4	
5	
6	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Números e Funções Reais — Avaliação AV2
Prof. Adriano Barbosa

PROFMAT 06/07/2018

Aluno(a):...

1. Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, consideremos as funções afins $g(x) = mx + t$, onde m é fixo e t será escolhido convenientemente. Prove que existe uma única escolha de t para a qual a equação $f(x) = g(x)$ tem uma, e somente uma, raiz x. Interprete este fato graficamente em termos dos gráficos de f e g.

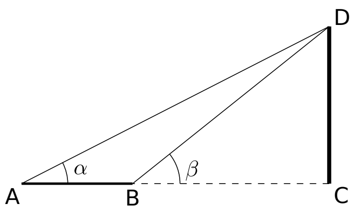
2. Seja $p(x)$ um polinômio do sétimo grau tal que $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = 10$. Sabendo que $p(8) = 30$, determine $p(-3)$.

3. (a) Usando o gráfico com o qual se define geometricamente o logaritmo natural, mostre que $\ln(1 + x) < x$ para todo $x > 0$. Conclua que $\ln x < x$.

   (b) Tomando $\sqrt{x}$ em vez de x nesta última desigualdade, prove que para todo x suficientemente grande, o quociente $\dfrac{\ln x}{x}$ pode tornar-se tão pequeno quanto desejemos.

   (c) Prova ainda que essa conclusão é válida para logaritmos em qualquer base $a > 1$.

4. Sabendo que os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}D$ medem, respectivamente, α e β radianos, determine a altura CD em função da medida de AB e dos ângulos α e β.



5. A expressão $M(t) = 200\ e^{-(t \ln 2)/30}$ dá a massa em gramas do césio 137 que restará de uma quantidade inicial após t anos de decaimento radioativo.

   (a) Quantos gramas havia inicialmente?

   (b) Quantos gramas permanecem depois de 10 anos? Use, caso seja necessário, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,8$.

   (c) Quantos anos levará para reduzir pela metade a quantidade inicial de césio 137?

6. Um fazendeiro tem 2400m de cerca para cercar uma área retangular que margeia um rio reto. Quais devem ser as dimensões da região para que se tenha a maior área possível?

Boa Prova!

① Dadas $f(x) = ax^2+bx+c$ e $g(x) = mx+t$, para que $f(x)=g(x)$, devemos ter

$$ax^2+bx+c = mx+t \iff ax^2+(b-m)x+c-t=0$$

A eq. quadrática acima tem apenas uma raiz se $\Delta=0$, logo

$$\Delta=(b-m)^2-4a(c-t)=0 \iff (b-m)^2-4ac+4at=0$$

$$\iff 4at = 4ac-(b-m)^2 \overset{(a\neq 0)}{\iff} t = c-\frac{(b-m)^2}{4a}$$

O gráfico de f é uma parábola e o de g uma reta não vertical. Variar o valor de t significa deslocar a reta que representa g verticalmente. Para que $f(x)=g(x)$ devemos ter um ponto em comum aos gráficos dessas funções. O t que calculamos é aquele de faz com que o gráfico de g seja tangente a parábola, ou seja, o único momento em que a reta e a parábola se tocam num único ponto.

② Como $p(x)$ tem grau 7, o polinômio $q(x)=p(x)-10$ também tem grau 7. Além disso,

$$q(1)=p(1)-10=0,\ q(2)=p(2)-10=0,\ q(3)=p(3)-10=0,\ q(4)=p(4)-10=0,$$
$$q(5)=p(5)-10=0,\ q(6)=p(6)-10=0 \text{ e } q(7)=p(7)-10.$$

Logo, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são as 7 raízes de $q(x)$. Assim,

$$q(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7).$$

Como $p(8)=30$,

$$20 = p(8)-10 = q(8) = a(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)(8-5)(8-6)(8-7) = 5040a$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{252}$$

$$\therefore q(x) = \frac{1}{252}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$$

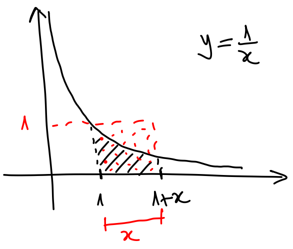
Portanto,

$$p(-3) - 10 = q(-3) = \frac{1}{252}(-3-1)(-3-2)(-3-3)(-3-4)(-3-5)(-3-6)(-3-7) = -\frac{604800}{252} = -2400$$

$$\Rightarrow p(-3) = -2390.$$

③

a)



A área marcada em preto vale $\ln(1+x), \forall x > 0$.

A área marcada em vermelho é $x, \forall x > 0$.

$\therefore \ln(1+x) < x, \forall x > 0$.

Como $\ln x$ é crescente e $x < 1+x \Rightarrow \ln x < \ln(1+x) \therefore \ln x < x, \forall x > 0$

b) Temos que $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$. Mas, $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$. Assim,

$$\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x} \iff \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Para x suficientemente grande, $\frac{2}{\sqrt{x}}$ fica tão pequeno quanto se queria. Portanto, $\frac{\ln x}{x}$ é tão pequeno quanto se deseje, basta tomar x suf. grande.

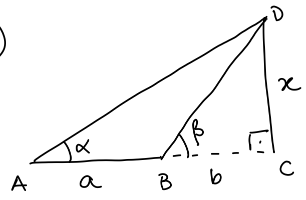
c) Sabemos que $\ln x = \frac{\log_a x}{\log_a e} \iff \log_a e \cdot \ln x = \log_a x$

$$\iff \frac{\log_a x}{x} = \log_a e \cdot \frac{\ln x}{x}$$

Pelo item b), $\log_a e \cdot \frac{\ln x}{x} < \frac{2\log_a e}{\sqrt{x}}$, pois $a > 1 \Rightarrow \log_a e > 0$.

Portanto, $\frac{\log_a x}{x} < \frac{2\log_a e}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{\log_a e}{x}$ é tão pequeno quanto se deseje, bastando tomar x grande o suf.

④



$$\text{tg}\beta = \frac{x}{b} \Rightarrow b = \frac{x}{\text{tg}\beta}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{x}{a+b} \Rightarrow x = (a+b)\,\text{tg}\alpha$$

$$\Rightarrow x = \left(a + \frac{x}{\text{tg}\beta}\right)\text{tg}\alpha = a\,\text{tg}\alpha + \frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}\,x$$

$$\Rightarrow x - \frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}\,x = a\,\text{tg}\alpha \Rightarrow \left(1 - \frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}\right)x = a\,\text{tg}\alpha \Rightarrow x = \frac{a\,\text{tg}\alpha}{1 - \frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}}$$

$$\Rightarrow x = a \cdot \frac{\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}$$

⑤ $M(t) = 200\, e^{-\frac{t \ln 2}{30}}$

a) A quantidade inicial é dada por $M(0) = 200\,g$.

b) Após 10 anos, temos:

$$M(10) = 200\, e^{-\frac{10 \ln 2}{30}} = 200\, e^{-\frac{1}{3}\ln 2} = 200\, e^{\ln\left(2^{-1/3}\right)} = 200 \cdot 2^{-1/3}$$

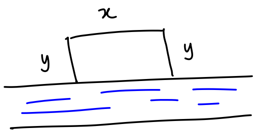
$$= 200 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 200 \cdot 0{,}8 = 160\,g$$

c) Queremos o valor de t tal que $M(t) = \frac{1}{2}M(0)$. Assim,

$$200\, e^{-\frac{t\ln 2}{30}} = \frac{1}{2}\cdot 200 \iff e^{-\frac{t\ln 2}{30}} = \frac{1}{2} \iff e^{\ln\left(2^{-t/30}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\iff 2^{-t/30} = 2^{-1} \iff \frac{t}{30} = 1 \iff t = 30 \text{ anos}.$$

⑥



Temos 2400 m para cercar a região, logo

$$x + 2y = 2400. \quad (I)$$

Além disso, a área da região é

$$A = x \cdot y. \quad (II)$$

Assim, (I) $\Rightarrow$ $x = 2400 - 2y$. Substituindo em (II):

$$A = (2400 - 2y)\, y = 2400y - 2y^2 \quad (\text{é função quadrática})$$

O máximo (pois $a = -2 < 0$) de A é dado por $-\frac{\Delta}{4a} = 720.000 \text{ m}^2$ e é obtido quando $y = \frac{-b}{2a} = 600 \text{ m} \overset{(I)}{\Rightarrow} x = 1200 \text{ m}$.

Portanto, a região deve ter medidas $1200\text{m} \times 600\text{m}$.