1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral III — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Engenharia Civil 13/06/2019

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.
Resolva apenas a avaliação referente a sua menor nota.

Avaliação P1:

1. Calcule as três derivadas parciais da função $w = \ln(2x^2 + 3y - z)$.

2. Seja $w = xe^{y/z}$, onde $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$. Calcule $\dfrac{dw}{dt}$.

3. Determine a taxa de variação de $T(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ no ponto $(0, \frac{\pi}{3})$ na direção $(8, -6)$.

4. Determine, caso existam, os pontos de máximo local, mínimo local e sela da função $F(u, v) = (1 - uv)(u - v)$.

5. Encontre os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(-4, -2, 0)$.

Avaliação P2:

1. Calcule a integral iterada $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \operatorname{sen} x \; dz\; dy\; dx$.

2. Esboce a região cuja área é dada pela integral $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r\; dr\; d\theta$ e calcule-a.

3. Calcule $\displaystyle\iiint_E x\; dV$, onde E é o tetraedro sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

4. Determine o trabalho realizado pelo campo $F(x, y) = (x, y + 2)$ ao mover uma partícula sobre a curva $r(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

5. Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C (y - \cos y)\; dx + (x \operatorname{sen} y)\; dy$, onde C é o círculo de centro em $(3, -4)$ e raio 2.

Boa Prova!

Avaliação P1

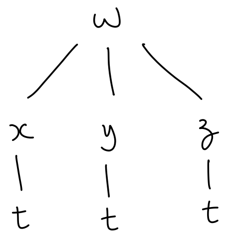
① $w = \ln(2x^2 + 3y - z)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2x^2+3y-z} \cdot 4x = \frac{4x}{2x^2+3y-z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2x^2+3y-z} \cdot 3 = \frac{3}{2x^2+3y-z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2x^2+3y-z} \cdot (-1) = -\frac{1}{2x^2+3y-z}$$

②



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$= e^{y/z} \cdot 2t + x e^{y/z} \cdot \frac{1}{z} \cdot (-1) + x e^{y/z} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) \cdot 2$$

$$= 2t\, e^{y/z} - \frac{x e^{y/z}}{z} - \frac{2xy e^{y/z}}{z^2}$$

③ $\|(8,-6)\| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow u = \dfrac{(8,-6)}{\|(8,-6)\|} = \left(\dfrac{8}{10}, -\dfrac{6}{10}\right) = \left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$

A taxa de variação é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial u}\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = \nabla T\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cdot u = \left(e^0 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}, e^0 \cos \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$$

④ Calculando os pontos críticos de F:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -v(u-v) + (1-uv) \cdot 1 = -uv + v^2 + 1 - uv = v^2 - 2uv + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -u(u-v) + (1-uv) \cdot (-1) = -u^2 + uv - 1 + uv = -u^2 + 2uv - 1$$

estão bem def. para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, logo os pontos críticos são aqueles onde

$$\begin{cases} v^2 - 2uv + 1 = 0 & (1) \\ -u^2 + 2uv - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Somando (1) e (2), temos: $v^2 - u^2 = 0 \Rightarrow v^2 = u^2 \Rightarrow |v| = |u|$.

Se $u \geq 0$ e $v \geq 0$: $v = u \overset{(1)}{\Rightarrow} u^2 - 2u^2 + 1 = 0 \Rightarrow u^2 = 1 \overset{(u\geq 0)}{\Rightarrow} u = 1 \Rightarrow v = 1$

Se $u \geq 0$ e $v < 0$: $u = -v \overset{(1)}{\Rightarrow} u^2 + 2u^2 + 1 = 0 \Rightarrow u^2 = -\frac{1}{3}$. Absurdo!

Se $u < 0$ e $v \geq 0$: $-u = v \overset{(1)}{\Rightarrow} u^2 + 2u^2 + 1 = 0 \Rightarrow u^2 = -\frac{1}{3}$. Absurdo!

Se $u < 0$ e $v < 0$: $-u = -v \overset{(1)}{\Rightarrow} u^2 - 2u^2 + 1 = 0 \Rightarrow u^2 = 1 \overset{(u<0)}{\Rightarrow} u = -1 \Rightarrow v = -1$.

Assim, os pontos críticos de F são $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = -2v, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 2v - 2u, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = -2u + 2v, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 2u$$

$$\therefore D(u,v) = \begin{vmatrix} -2v & 2v-2u \\ 2v-2u & 2u \end{vmatrix} = -4uv - (2v-2u)^2$$

$\Rightarrow D(1,1) = -4 < 0 \Rightarrow (1,1)$ é pto de sela

e $D(-1,-1) = -4 < 0 \Rightarrow (-1,-1)$ é pto de sela.

⑤ Aplicando o método dos mult. de Lagrange, sejam

$f(x,y,z) = (x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2$ (quadrado da dist. a $(-4,-2,0)$)

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= 2(x+4) + 2(y+2) + 2z \\ \nabla g(x,y,z) &= 2x + 2y - 2z \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \cancel{2}(x+4) = \cancel{2}\lambda x \\ \cancel{2}(y+2) = \cancel{2}\lambda y \\ \cancel{2}z = -\cancel{2}\lambda z \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = -4 \\ (1-\lambda)y = -2 \\ (1+\lambda)z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Note que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, pois caso contrário

$(1-\lambda)\cdot 0 = -4 \Rightarrow 0 = -4$

e $(1-\lambda)\cdot 0 = -2 \Rightarrow 0 = -2$

De (3): $z = 0$ ou $\lambda = -1$.

Se $z = 0$, de (4), temos $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$. Absurdo!

Se $\lambda = -1$:

$$(1) \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$(2) \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1.$$

Substituindo em (4):

$$2^2 + (-1)^2 - z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 5 \Rightarrow z = \pm\sqrt{5}.$$

Portanto, os pontos do cone mais próximos de $(-4,-2,0)$ são $(-2,-1,\sqrt{5})$ e $(-2,-1,-\sqrt{5})$.

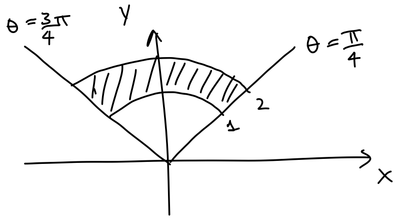
Avaliação P2

① $$\int_0^{\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} y\,\text{sen}\,x \; dz\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{1} y\,\text{sen}\,x \left(z \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{1} y\,\text{sen}\,x \cdot \sqrt{1-y^2}\; dy\,dx = \int_0^{\pi} \text{sen}\,x\, dx \cdot \int_0^{1} y\sqrt{1-y^2}\, dy$$

$$\overset{(u=1-y^2)}{=} \left(-\cos x \Big|_0^{\pi}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}\,du\right) = \left[-(-1)+1\right]\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1\right) = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$

② Temos que: $1 \leq r \leq 2$ e $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

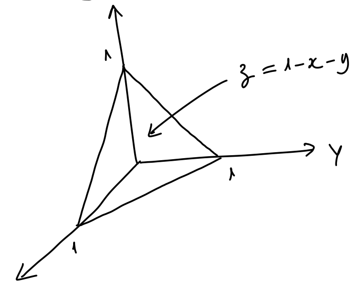


A região é um quarto da faixa entre os círculos de raio 1 e 2, logo sua área é $\frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Calculando a integral:

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^2 r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \cdot \int_1^2 r\,dr = \left(\theta\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}\right)\cdot\left(\frac{r^2}{2}\Big|_1^2\right) = \left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

③ A região de integração é o tetraedro:



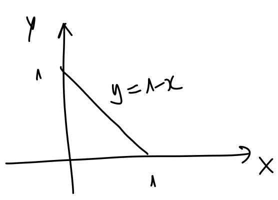
De $x+y+z=1$, temos:

$z=0 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow y = 1-x$

$y=0 \Rightarrow x+z=1 \Rightarrow z=1-x$

$x=0 \Rightarrow y+z=1 \Rightarrow z = 1-y$

$\therefore E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}$



Assim,

$$\iiint_E x\,dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} x - x^2 - xy\; dy\,dx = \int_0^1 x(1-x) - x^2(1-x) - x\frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \int_0^1 x - x^2 - x^2 + x^3 - x\frac{(1-2x+x^2)}{2}dx$$

$$= \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 \frac{-x+2x^2-x^3}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 - 2x^2 + x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{24}.$$

④ O campo F é conservativo. De fato, se f é tal que $\nabla f = F$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = y+2 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y) \Rightarrow y+2 = \frac{\partial f}{\partial y} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2} + 2y$$

$$\therefore f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2y.$$

Os pontos inicial e final do caminho são:

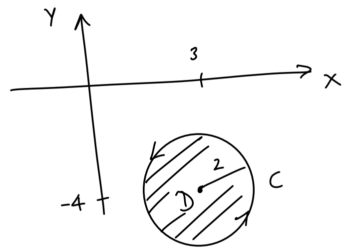
$$r(0) = (0 - \operatorname{sen} 0,\ 1 - \cos 0) = (0,0)$$

$$r(2\pi) = (2\pi - \operatorname{sen} 2\pi,\ 1 - \cos 2\pi) = (2\pi, 0).$$

Pelo Teo. Fund. dos Int. de Linha:

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(2\pi,0) - f(0,0) = 2\pi^2$$

⑤



A curva C é fechada, simples, suave e orient. positivamente.

$$F(x,y) = (y - \cos y,\ x \operatorname{sen} y) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \operatorname{sen} y \text{ e } \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \operatorname{sen} y$$

são contínuas.

Pelo Teo. de Green:

$$\int_C (y - \cos y)\,dx + (x \operatorname{sen} y)\,dy = \iint_D \operatorname{sen} y - 1 - \operatorname{sen} y \, dA = -\iint_D dA = -\text{área}(D)$$

$$= -\pi \cdot 2^2 = -4\pi.$$