UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral III — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Civil 05/04/2019

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o maior domínio das funções e interprete cada conjunto geometricamente.

   (a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

   (b) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$

2. Calcule as derivadas parciais pedidas.

   (a) $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y)$

   (b) $w = e^{xy^2z}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}(x, y, z)$

3. Use a aproximação linear de $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$ em $(2, 1)$ para aproximar o valor de $f(2.1, 0.9)$.

4. Dada $f(x, y) = e^{xy}$ e $P = (0, 2)$:

   (a) Calcule a derivada direcional de f no ponto P na direção que tem ângulo $\pi/4$ com relação ao eixo x.

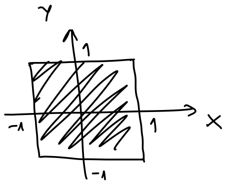
   (b) Determine a taxa de variação máxima de f no ponto P e a direção onde ocorre.

   (c) Classifique os pontos críticos de f em máximo local, mínimo local ou sela.

5. Deseja-se produzir uma caixa sem tampa com volume de 32000cm^3. Utilizando o método dos Multiplicadores de Lagrande, determine quais devem ser as dimensões da caixa de modo que a quantidade de material utilizada seja a menor possível.

Boa Prova!

① a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$



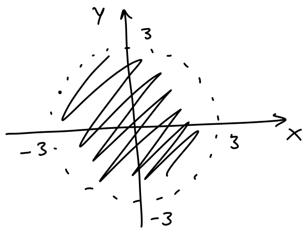
Precisamos que:

$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

e $1-y^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$.

Logo, o domínio de f é o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$

b) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$



Precisamos que:

$9 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 9$

Logo, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 9\}$

② a) $f(x,y) = x^4y^2 - x^3y$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2 - 3x^2y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8x^3y - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = 24x^2y - 6x$

b) $w = e^{xy^2z}$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = y^2 z e^{xy^2z} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = z\left(2y e^{xy^2z} + y^2 \cdot 2xyz\, e^{xy^2z}\right) = e^{xy^2z}\left(2yz + 2xy^3z^2\right)$

③ $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y) - x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{9}$

e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{0 - x}{(x+y)^2} = -\frac{x}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\frac{2}{9}$

e $f(2,1) = \frac{2}{3}$

63	3
21	3
7	7
1	$\cancel{3^2} \cdot 7$

90	2
45	3
15	3
5	5
1	$2 \cdot \cancel{3^2} \cdot 5$

Logo, a aprox. linear de f em $(2,1)$ é:

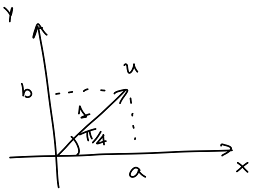
$L(x,y) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2) - \frac{2}{9}(y-1)$

$\therefore f(2.1, 0.9) \approx L(2.1, 0.9) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot 0.1 - \frac{2}{9} \cdot (-0.1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{10}$

$= \frac{60+1+2}{90} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10} = 0{,}7$

④ $f(x,y) = e^{xy} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}$

a) Determinando a direção u unitária:



$$a = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore\ u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$b = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial u}(0,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

b) A variação máx. de f em (0,2) é dada por $\|\nabla f(0,2)\| = \|(2,0)\| = 2$ e ocorre na direção $\nabla f(0,2) = (2,0)$

c) Calculando os pontos críticos de f (note que as derivadas parciais de f existem para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$):

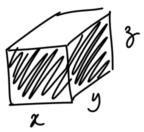
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y e^{xy} = 0 & (\div e^{xy}) \\ x e^{xy} = 0 & (\div e^{xy}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \therefore\ (0,0) \text{ é pto crítico de } f.$$

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy} + xy e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xy e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

$$\therefore\ D(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ é pto de sela.}$$

⑤ Sejam x, y e z as dimensões da caixa. Temos que:



$$x, y, z > 0$$
$$f(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy$$
$$g(x,y,z) = xyz = 32000$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \nabla f = (2z + y,\ 2z + x,\ 2x + 2y) \\ \nabla g = (yz,\ xz,\ xy) \end{array}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2z+y=\lambda yz & (\times x) \\ 2z+x=\lambda xz & (\times y) \\ 2x+2y=\lambda xy & (\times z) \\ xyz=32000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xz+xy=\lambda xyz & (1) \\ 2zy+xy=\lambda xyz & (2) \\ 2xz+2yz=\lambda xyz & (3) \\ xyz=32000 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (2), temos:

$$2xz+\cancel{xy}=2zy+\cancel{xy} \Rightarrow \cancel{2}xz=\cancel{2}yz \Rightarrow xz=yz \overset{(z>0)}{\Rightarrow} x=y$$

De (2) e (3), temos:

$$2\cancel{z}y+xy=2xz+2\cancel{y}z \Rightarrow xy=2xz \overset{(x>0)}{\Rightarrow} y=2z$$

Substituindo em (4):

$$2z\cdot 2z\cdot z=32000 \Rightarrow 4z^3=32000 \Rightarrow z^3=8000 \overset{(z>0)}{\Rightarrow} z=20$$

$$\Rightarrow y=40$$

$$\Rightarrow x=40 .$$